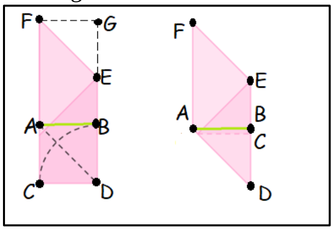
apoiar os argumentos nos ângulos observados. A partir dessa observação, a pesquisadora comentou que duas retas são paralelas se a reta perpendicular a uma delas é também perpendicular à outra, para observar se a informação poderia dar suporte à argumentação. Os alunos manipularam novamente a dobradura e discutiram sobre como argumentar sobre as propriedades dos lados do paralelogramo. Os extratos a seguir apresentam uma sequência de reflexões dos alunos, que levaram à justificativa do paralelismo dos lados.

- Como aqui tem 180° e a linha está partindo no meio, tem 90° de cada lado (noção de bissetriz)
- Então a gente pegou o 90° e dobrou no meio e ficou 45° (noção de bissetriz novamente)
- Então tem o 45° e aqui ficou 90°
- Como nós temos uma folha que é quadrada nas pontas, nós temos 90° aqui (noção de perpendicularidade)
- E como nós dobramos os 90° aqui e aqui tem 180° (noção de ângulo raso)
- Aqui então tem 90° porque $90 + 90 = 180$ (noção de ângulos suplementares)
- Então esses lados são paralelos, o lado direito e o lado esquerdo (propriedade de retas paralelas e perpendiculares)

Para compreender e analisar o processo de argumentação dos alunos, vamos observar a Figura 10. Na argumentação, o que chamaremos de Aluno 1, com o auxílio de seus colegas, argumenta que os lados direito ($\overline{DE}$) e esquerdo ($\overline{AF}$) da figura são paralelos. Analisando a argumentação do grupo, identificamos que, primeiro o Aluno 1 observa que o segmento $\overline{AB}$, que representa a marca da dobradura, é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}F$, que mede 180° (o Axioma 3 de Huzita sustenta essa afirmação). Com isso, o Aluno 1 deduz que os ângulos $C\hat{A}B$ e $B\hat{A}F$ medem 90°, concluindo a perpendicularidade entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CF}$. Em seguida, o Aluno 1 identificou o segmento $\overline{AD}$ como a bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$, concluindo que o ângulo $D\hat{A}B$ mede 45° (novamente, o Axioma 3 sustenta a afirmação). Em seguida o Aluno 1 argumenta que, ao fazer coincidir o ponto C com o ponto B, os ângulos $D\hat{C}A$ e $D\hat{B}A$ também coincidem. Como o ângulo $D\hat{C}A$ é um dos ângulos da folha de papel, o Aluno 1 concluí que o ângulo $D\hat{B}A$ mede 90° e argumenta que, como o ângulo $D\hat{B}E$ mede 180°, então o ângulo $A\hat{B}E$ mede 90°, implicitamente utilizando a ideia de ângulos suplementares. Finalmente, o Aluno 1 conclui paralelismo entre os segmento $\overline{AF}$ e $\overline{DE}$. Nessa argumentação, evidencia-se que os alunos construíram ou utilizaram uma série de conceitos matemáticos, como perpendicularidade, paralelismo, bissetriz, ângulos suplementares, e organizaram uma sequência lógica de argumentos, característica do pensamento geométrico. Assim como De Villiers (1997) afirma, a aprendizagem ocorre quando o aluno usa de argumentações para explicar um conceito. Evidentemente, não temos uma argumentação formal, mas uma sequência de argumentos que explicam a veracidade de suas observações, conforme defendem Basso e Notare (2015).

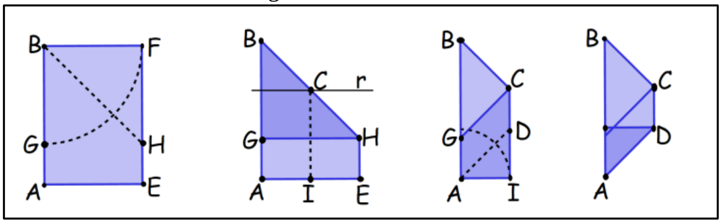
Figura 10 - Dobradura 3




Fonte: Acervo pessoal

Outra situação que analisaremos nesse artigo refere-se à Dobradura 4 do livro digital, que forma um trapézio (Figura 11). Trazemos aqui a discussão sobre os ângulos do trapézio formado pela dobradura virtual (O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê? e Que medidas tem esses ângulos? Por quê?). A resposta dos alunos para essas questões foi: “*Dois obtusos e dois agudos. Dois ângulos de 45 graus e dois de 135 graus*”.

Figura 11- Dobradura 4




Fonte: Acervo pessoal

Manipulando a dobradura virtual e observando o comportamento dos ângulos, os alunos identificaram que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são respectivamente as bissetrizes dos ângulos $E\hat{A}B$e $A\hat{B}F$ (Axioma 3). Portanto, os alunos concluíram que os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ medem 45°, e os denominaram de ângulos agudos.

Os alunos perceberam, a partir da exploração da dobradura no GeoGebra, possibilitada pela ação de arrastar do controle deslizante, que, ao dobrar o ponto F sobre o segmento $\overline{AB}$, obtém-se o ângulo $D\hat{C}B$ medindo 135°. Pois, seja r uma reta paralela ao segmento $\overline{AE}$ que passa pelo ponto C, o segmento $\overline{IC}$ é perpendicular à reta r, com isso, o segmento $\overline{BH}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{C}$, então o ângulo $I\hat{C}H$ mede 45°. Os estudantes identificaram o ângulo raso $H\hat{C}B = 180°$, e então determinaram o ângulo $I\hat{C}B = H\hat{C}B - ICH = 135°$. Em seguida, ao dobrar o ponto I sobre o segmento $\overline{AB}$, os estudantes argumentaram que está sendo subtraído 45° do ângulo raso $I\widehat{D}C$, pois perceberam que o segmento $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $I\widehat{D}G$, que identificaram medir 90°. Sendo assim, $A\widehat{D}C = I\widehat{D}C - I\widehat{D}A = 135°$. Com isso, os estudantes identificaram os ângulos $A\widehat{D}C$ e $D\hat{C}B$ como obtusos.

Assim como na análise da Dobradura 3, nessa dobradura os alunos utilizaram uma série de conceitos matemáticos, como perpendicularidade, paralelismo, bissetrizes, classificações de ângulos, e organizaram uma sequência lógica de argumentos, para explicar suas conjecturas, elaboradas a partir das explorações no modelo dinâmico. Mesmo que os alunos não tenham apresentado uma argumentação formal, clássica da Geometria Euclidiana, há evidências de argumentações que explicam a veracidade de suas observações, corroborando com De Villiers (1997), Armella (2016) e Basso e Notare (2015), que defendem que o processo de prova na educação básica pode ser desassociado do rigor matemático. Percebemos nas análises dos dados que os alunos avançaram no processo de aprendizagem de Geometria, pois conforme Gravina (2001), esse processo ocorre quando o aluno passa de um estágio de apenas identificar uma figura geométrica pela sua aparência física, para determinar a figura geométrica pelas suas propriedades. Atividades que provocam o exercício da argumentação e justificativa favorecem esse processo e realçamos com os dados dessa investigação que isso é possível.

Observamos que os alunos, desafiados pelas atividades virtuais de dobradura, foram convidados a vivenciar ações importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, como explorar, manipular, conjecturar, testar e argumentar. Os argumentos apresentados pelos estudantes não consistem em provas rigorosas de Geometria, mas revelam um processo importante de desenvolvimento do pensamento geométrico e nos encorajam no trabalho de resgate de atividades de argumentação na sala de aula de Matemática da escola básica.

## 6. Considerações finais

O resgaste e incentivo à argumentação nas aulas de Matemática da educação básica é o pilar dessa pesquisa. Os ambientes de geometria dinâmica trouxeram à tona a discussão sobre as possibilidades do trabalho em sala de aula com a essência da Geometria Euclidiana, ou seja, o resgate do desenvolvimento de habilidades matemáticas de exploração, testes, conjecturas e argumentações. A partir de atividades de manipulação de dobraduras virtuais no GeoGebra, convidamos os alunos a identificarem regularidades e propriedades de figuras geométricas que se formavam e, em seguida, argumentarem sobre suas constatações. Identificamos que, desafiar os estudantes a argumentar sobre as conjecturas que elaboram, proporciona um trabalho inicial com o desenvolvimento de provas. Evidentemente, os argumentos apresentados pelos alunos são para comunicar e expressar seus entendimentos sobre propriedades (e não caracterizam demonstrações matemáticas formais), mas evidenciam que é possível esse trabalho em sala de aula, com uma versão contemporânea possibilitada pela geometria dinâmica.

## 7. Referências

ARMELLA, Luis Moreno; TRIGO, Manuel Santos; MACHIN, Matías Camacho. Problem solving and the use of digital Technologies within the Mathematical Working space framework. **ZDM Mathematics Education**, 48, p. 827-842, fev, 2016.

BASSO, Marcus; NOTARE, Márcia. Pensar com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 13, n. 2, dez, 2015.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

DE VILLIERS, M. **The Role of Proof in Investigative, computer-based Geometry: Some personal reflections.** Chapter in Schattschneider, D. & King, J. (1997). Geometry Turned On! Washington: MAA, p. 15-24.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre: UFRGS, 2001. 277 p. Tese de doutorado, curso de Pós-Graduação em informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/2545>. Acesso em: 16/03/2019.

GRAVINA, Maria; CONTIERO, Lucas. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 1, jul, 2011.

MENEZES, Daniel Brandão. **O uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: História, Teorema e Problemas**. Fortaleza: UFC, 2014, 67 p. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, 2014. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11674. Acesso em: 29/10/2018.

NOTARE, Márcia; BASSO, Marcus. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, jul, 2018.

STAHL, Gerry. **Translating Euclid**. USA, 2013. Disponível em: http://gerrystahl.net/elibrary/euclid/euclid.pdf. Acesso: em 10/05/2020.