ANALITICIDADE DAS FUNÇÕES COM VALORES NO ESPAÇO DOS OPERADORES LINEARES LIMITADOS

Ernesto Bruno Cossi

Professor Catedrático de Matemática
da Faculdade de Agronomia e Veterinária
da Universidade Federal do R. G. do Sul

1 — EXPLICAÇÃO

A proposição que apresentamos, neste artigo, é o teorema 4.4 - G citado a página 206 do livro **Introduction to Functional Analysis** de Angus E. Taylor, cuja demonstração é deixada a cargo do leitor. A prova segue caminho análogo ao do teorema 4.4 - F demonstrado à página 205 da obra citada, tendo sido elaboradas, aqui, as modificações necessárias, face à nova situação.

2 — PROPOSIÇÃO

“Se X e Y são espaços de Banach complexos, se $[X, Y]$ é o espaço linear normado de todos os operadores lineares limitados T definidos em X com valores em Y , se Δ é um conjunto aberto não vazio do plano complexo, se A é uma função definida em Δ com valores em $[X, Y]$, se, para todo $x \in X$, φ_x é a função definida em $[X, Y]$ com valores em Y dada por $\varphi_x T = Tx$, se Z é um sub-espaço linear fechado que é determinante relativo à norma para $[X, Y]$, e se a função composta $f_x = \varphi_x \circ A$ é localmente analítica em Δ , para cada $x \in Z$, então, A é localmente analítica em Δ .”

DEMONSTRAÇÃO:

Se $\lambda \in \Delta$, pondo $A\lambda = A_\lambda$, vem $f_x(\lambda) = (\varphi_x \circ A)(\lambda) = \varphi_x(A\lambda) = \varphi_x(A_\lambda) = A_\lambda x$, e sendo Z determinante para $[X, Y]$ relativo à norma, $\nu(Z) > 0$, portanto,

$$\|T\| \leq \frac{q_Z(T)}{\nu(Z)}, \text{ para qualquer } T \in [X, Y], \text{ onde}$$

$$q_Z(T) = \sup \{ \|Tx\| \mid x \in Z, \|x\| = 1 \} \text{ e}$$

$$\nu(Z) = \inf \{ q_Z(T) \mid T \in [X, Y], \|T\| = 1 \}.$$

Como Y é completo, $[X, Y]$ também o é, e é suficiente, pois, mostrar

$$\lim_{\lambda, \mu \rightarrow \lambda_0} \left\| \frac{A_\lambda - A_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} - \frac{A_\mu - A_{\lambda_0}}{\mu - \lambda_0} \right\| = 0, \text{ sendo } \lambda, \mu \neq \lambda_0 \text{ e } \lambda, \mu \in \Delta.$$

Seja C a circunferência positivamente orientada dada por

$$\Delta = \{ \lambda \mid |\lambda - \lambda_0| = r \}, \text{ onde } r > 0 \text{ é tal que } \{ \lambda \mid |\lambda - \lambda_0| \leq r \} \subset \Delta$$

A função f_x é contínua em Δ por ser diferenciável para cada $x \in Z$,

logo, a restrição de f_x a C é limitada, isto é, $\sup \{ \|f(\xi)\| \mid \xi \in C \}$

$< +\infty$ ou $\sup \{ \|A_\xi x\| \mid \xi \in C \} < +\infty$, para todo $x \in Z$. Assim,

pelo teorema da limitação uniforme, vem $\sup \{ \|A_\xi\| \mid \xi \in C \} < +\infty$,

existe $B > 0$ tal que $\|A_\xi\| < B$, qualquer que seja $\xi \in C$.

Além, pois, $\|A_\xi x\| \leq \|A_\xi\| \|x\| \leq B \|x\|$, para $x \in Z$ e $\xi \in C$.

Dado, agora, qualquer $\varepsilon > 0$, sejam λ e μ tais que

$$|\lambda - \lambda_0|, |\mu - \lambda_0| < \delta = \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\varepsilon r^2 v(Z)}{8B} \right\} \text{ e mostre-se}$$

$$\left\| \frac{A_\lambda - A_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} - \frac{A_\mu - A_{\lambda_0}}{\mu - \lambda_0} \right\| < \varepsilon. \text{ De fato, pelo teorema integral de Cauchy para funções com valores em espaço de Banach, tem-se,}$$

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_x(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A_\xi x}{\xi - \lambda} d\xi, \text{ e também,}$$

$$f_x(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A_\xi x}{\xi - \lambda_0} d\xi \text{ e}$$

$$f_x(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A_\xi x}{\xi - \mu} d\xi,$$

$$\text{logo, pondo } T = \frac{A_\lambda - A_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} - \frac{A_\mu - A_{\lambda_0}}{\mu - \lambda_0}, \text{ vem}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x(T) &= \frac{\varphi_x(A_\lambda) - \varphi_x(A_{\lambda_0})}{\lambda - \lambda_0} - \frac{\varphi_x(A_\mu) - \varphi_x(A_{\lambda_0})}{\mu - \lambda_0} = \\ &= \frac{f_x(\lambda) - f_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f_x(\mu) - f_x(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C A_\xi x \left[\frac{1}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\xi - \lambda_0} - \frac{1}{\xi - \mu} + \frac{1}{\xi - \lambda_0} \right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C A_\xi x \frac{\lambda - \mu}{(\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} d\xi.$$

$$\text{Ora, } |\xi - \lambda|, |\xi - \mu| > \frac{r}{2}, \text{ donde, } \left\| A_\xi x \frac{\lambda - \mu}{(\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} \right\|$$

$$\leq \frac{4B \|x\| |\lambda - \mu|}{r^3} \text{ e } \|\varphi_x T\| \leq \frac{4B \|x\| |\lambda - \mu|}{r^2}.$$

$$\text{Para } x \in Z \text{ tal que } \|x\| = 1, \text{ tem-se } \|Tx\| = \|\varphi_x T\| \leq \frac{4B |\lambda - \mu|}{r^2},$$

$$\text{donde, } q_Z(T) \leq \frac{4B |\lambda - \mu|}{r^2} \text{ e}$$

$$\|T\| \leq \frac{4B |\lambda - \mu|}{r^2 v(Z)}, \text{ para qualquer } T \in [X, Y].$$

$$\text{Portanto, } \left\| \frac{A_\lambda - A_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} - \frac{A_\mu - A_{\lambda_0}}{\mu - \lambda_0} \right\| \leq \frac{4B [|\lambda - \lambda_0| + |\mu - \lambda_0|]}{r^2 v(Z)} <$$

$$\frac{8B\delta}{r^2 v(Z)} \leq \varepsilon.$$