UMA PROPOSIÇÃO SOBRE SÉRIES DUPLAS

Ernesto Bruno Cossi

A proposição que segue é uma generalização para as séries duplas de um teorema clássico sobre séries. É mostrado que, sob certas condições, esgotando-se os termos de uma série dupla para a formação de novas, cujas somas são termos de outra série dupla, a soma desta coincide com a da inicial.

PROPOSIÇÃO

Dada uma família enumerável de funções:

$$\begin{array}{ccccccc} f_{11}, & \dots, & f_{1q}, & \dots & & & \\ \dots & & & & & & \\ f_{p1}, & \dots, & f_{pq}, & \dots & & & \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

tais que:

1^o) quelque

$$f_{pq}: N \times N \longrightarrow N \times N$$

é biunívoca, sendo N o conjunto dos números naturais;

29)

$$f_{pq}(N \times N) \cap f_{rs}(N \times N) = \emptyset$$

$$88 \quad (p, q) \neq (r, s);$$

39)

$$\bigcup_{p,q=1}^{\infty} f_{pq}(N \times N) = N \times N;$$

e dada uma série dupla

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$$

absolutamente convergente, se

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = A \quad \text{e se} \quad b_{mn}^{pq} = a_{pq}^{(m,n)},$$

então a série dupla

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{pq}$$

converge assolutamente e se

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{pq} = A_{pq}, \quad \sum_{p,q=1}^{\infty} A_{pq}$$

converge assolutamente e

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} A_{pq} = A, \quad \text{isto } \epsilon, \quad \sum_{p,q=1}^{\infty} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{pq} \right] = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn},$$

ou ainda,

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{fpq}(m, n) \right] = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

Demonstração: Consideremos inicialmente uma função

$$\mu: N \longrightarrow N \times N,$$

que seja sôbre e biunívoca; para todo par $(p, q) \in N \times N$ existe pois um, e sômente um, $i \in N$ tal que

$$\mu(i) = (p, q)$$

e as três condições da hipótese escrevem-se:

19)

$$f_{\mu(i)}: N \times N \longrightarrow N \times N,$$

biunivoca;

29)

$$F_{\mu(i)}(N \times N) \cap F_{\mu(j)}(N \times N) = \emptyset$$

104 1 4 21

39)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{\mu}(I_i) \quad (N \times N) = N \times N,$$

THE GARDEN,

$$b_{mn}^{pq} = b_{mn}^{\mu(i)} \quad e \quad A_{pq} = A_{\mu(i)}$$

A série

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} b_{mn}^{\mu(i)} \quad \text{ou} \quad \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{\Gamma \mu(i)}^{(m, n)}$$

converge absolutamente, pois, já que

$$f_{\mu}(i): N \times N \rightarrow N \times N$$

é biunívoca, é sub-série de

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$$

que converge absolutamente, e seja

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{\mu(i)} = A_{\mu(i)}.$$

Disponhamos a série dupla

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{\mu(i)}$$

segundo a série simples

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mu(i)},$$

onde

$$c_n^{\mu(i)} = b_{\mu(n)}^{\mu(i)},$$

já que

$$\mu: N \rightarrow N \times N$$

é biunívoca e sôbre.

Logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mu(i)}$$

converge absolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mu(i)} = A_{\mu(i)}.$$

Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n,$$

a disposição em série simples de

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$$

$$d_n = a_{\mu(n)};$$

logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

converge absolutamente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = A;$$

vale também como sabemos

$$d_{\mu^{-1}(m, n)} = a_{mn}$$

para $(m, n) \in N \times N$.

Pôsto isto:

1º) consideremos as funções

$$g_i = \mu^{-1} \circ f_{\mu(i)} \circ \mu: N \rightarrow N, \quad i = 1, 2, \dots,$$

que estão bem definidas. Ver figura.

Portanto, a g_i é também biunívoca, pois é composta de biunívocas.

2º) se $i \neq j$, como a função é biunívoca, teremos $\mu(i) \neq \mu(j)$,

logo

$$f_{\mu(i)}(N \times N) \cap f_{\mu(j)}(N \times N) = \emptyset,$$

mas como μ é sobre,

$$\mu(N) = N \times N$$

e, substituindo,

$$f_{\mu(i)}(\mu(N)) \cap f_{\mu(j)}(\mu(N)) = \emptyset;$$

sendo estes conjuntos disjuntos, e sendo a μ biunívoca e μ^{-1} também, podemos escrever,

$$\mu^{-1}[f_{\mu(i)}(\mu(N))] \cap \mu^{-1}[f_{\mu(j)}(\mu(N))] = \emptyset,$$

donde

$$g_i(N) \cap g_j(N) = \emptyset$$

tão

3º) como cada g_i toma valores em N , $g_i(N) \subset N$ e em

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(N) \subset N;$$

provemos que

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(N).$$

Para isto dado $k \in N$, existe algum par (m, n) tal que

$$\mu^{-1}(m, n) = k;$$

mas o par

$$(m, n) \in N \times N = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_{\mu(i)}(N \times N),$$

logo existe algum i , tal que

$$(m, n) \in f_{\mu(i)}(N \times N),$$

donde existe algum par (r, s) , tal que

$$f_{\mu(i)}(r, s) = (m, n)$$

e como

$$(r, s) \in N \times N$$

existe algum $t \in N$ tal que

$$\mu(t) = (r, s).$$

Mas

$$k = \mu^{-1}(f_{\mu(i)}(\mu(t))) = (\mu^{-1} \circ f_{\mu(i)} \circ \mu)(t) = g_i(t),$$

donde

$$k = g_i(t)$$

$$k \in g_i(N) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} g_i(N), \quad \text{logo} \quad N = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_i(N).$$

Aplicando, agora, um teorema conhecido, para a família enumerável de funções g_i , já que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

converge absolutamente, vem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{g_i(n)} \quad (2)$$

converge absolutamente e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_{g_i(n)} \right]$$

também, valendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_{g_i(n)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = A. \quad (3)$$

Porém

$$c_n^{\mu(i)} = b_{\mu(n)}^{\mu(i)} = a_{f_{\mu(i)}(n)}^{\mu(i)} = d_{g_i(n)},$$

isto é,

$$c_n^{\mu(i)} = d_{g_i(n)},$$

logo, pela (2),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mu(i)}$$

converge absolutamente, o que aliás já sabíamos pela (1) e, pela (3),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mu(i)} \right]$$

converge absolutamente e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\mu(i)} \right] = A,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{\mu(i)}$$

converge absolutamente e

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{\mu(i)} = A.$$

Pondo $A_{\mu(i)} = B_i$, vem da (4) que

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

converge absolutamente e da (5) que

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = A;$$

e sendo a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

uma disposição em série simples da série dupla

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} A_{pq},$$

pois μ é sôbre e biunívoca,

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} A_{pq}$$

converge absolutamente e

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} A_{pq} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i = A,$$

ou

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{pq} \right] = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

--oo0oo--

Composição de:

Editôra "EMMA"

Vig. José Inácio, 368

P.A. — R.G.S.