

UMA PROPOSIÇÃO SOBRE INCLUSÃO DE INTERVALOS NO R^n

Ernesto Bruno Cossi

1 — O resultado do número 3, abaixo, permite imediatamente enunciar para os intervalos fechados do R^n a proposição que, para os intervalos semi-abertos do R^n , tem o seguinte enunciado:

Se $I_p, p = 0, 1, 2, \dots, k$, são intervalos semi-abertos do R^n , se

$$I_0 \subset \bigcup_{p=1}^k I_p$$

8 80

$$v(I_p)$$

são os volumes correspondentes, então

$$v(I_0) \leq \sum_{p=1}^k v(I_p)''.$$

A proposição enunciada acima é, obviamente, conseqüência de resultados mais gerais da Teoria da Medida, porém, desejando-se utilizá-la sem os recursos de tal teoria, como por exemplo, ocorre no teorema da dependência funcional, a proposição do número 3 apresenta alguma utilidade.

2 — Lema

"Se $I = (a, b] \subset \mathbb{R}^n$, se $x_0 \in I$ e se $J = (c, x_0) \subset \mathbb{R}^n$, então $I \cup J \neq \emptyset$ ".

Demonstração:

Pondo

$$a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_n) \text{ e } x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0),$$

vem

$$I = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n], J = (c_1, x_1^0) \times \dots \times (c_n, x_n^0),$$

$$a_i < x_i^0 \leq b_i \text{ e } c_i < x_i^0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Sejam

$$\gamma = \min. (x_i^0 - a_i^0, x_i^0 - c_i^0; i = 1, 2, \dots, n) > 0 \quad (1), 0 < \delta < \gamma \quad (2)$$

e

$$y = (y_1, \dots, y_n) \text{ com } y_i = x_i^0 - \delta, i = 1, 2, \dots, n.$$

Temos pois, $y_i < x_i^0$ e da (2) $y_i > x_i^0 - \gamma$,

vinda da (1), $y_i > a_i$ e $y_i > c_i$.

Portanto,

$$a_i < y_i < x_i^0 \leq b_i \text{ e } c_i < y_i < x_i^0, i = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$y \in I \text{ e } y \in J, \text{ isto é, } I \cap J \neq \emptyset.$$

3. — Proposição

"Se $K_0 = [a_0, b_0]$, se $K_p = [a_p, b_p]$, $p = 1, 2, \dots, k$, se

$$|_0 = (a_0, b_0],$$

se $|_p = (a_p, b_p]$ e se $K_0 \subset \bigcup_{p=1}^k K_p$, então $|_0 \subset \bigcup_{p=1}^k |_p$."

Demonstração:

Admitamos que não valha a tese, isto é, que exista

$$x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in |_0 \text{ tal que } x_0 \notin |_p, p = 1, 2, \dots, k.$$

Sejam

$$a = (a_1^p, \dots, a_n^p), b_p = (b_1^p, \dots, b_n^p), a_0 = (a_1^0, \dots, a_n^0) \text{ e } b_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0)$$

e, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, caso existam $b_i^p < x_i^0$,

ponhamos

$$c_i = \max (b_i^p; b_i^p < x_i^0) < x_i^0 \quad (1)$$

e, caso não existam, tomemos qualquer

$$c_i < x_i^0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Sejam $c = (c_1, \dots, c_n)$ e $J = (c, x_0)$,

e mostremos que

$$J \cap K_p = \emptyset, \text{ qualquer que seja } p = 1, 2, \dots, k.$$

De fato, se para algum p tivéssemos

$$J \cap K_p \neq \emptyset, \text{ considerando dois casos, teríamos:}$$

ou $b_i^p < x_i^0$, para algum $i = 1, 2, \dots, n$, ou $b_i^p \geq x_i^0$,

qualquer que seja $i = 1, 2, \dots, n$.

No primeiro caso, pela (1),

$$b_1^p < c_1 \quad (3)$$

e pela (2) existe

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in J \cap K_p,$$

isto é, para todo i ,

$$c_i < z_i < x_1^0 \quad (4) \text{ e } a_1^p \leq z_i \leq b_1^p \quad (5),$$

vindo destas, para todo i ,

$$c_i < b_1^p \text{ que contraria a (3).}$$

No segundo caso, para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$, $b_1^p \geq x_1^0$ (6),

e já que $x_0 \in I_p$, como estamos supondo, devemos ter para algum i ,

$$\text{ou } x_1^0 \leq a_1^p \quad (7) \quad \text{ou } x_1^0 > b_1^p \quad (8);$$

ora, (6) e (8) se contradizem, logo para algum i , vale a (7).

Das (4) e (7) vem

$$z_i \leq a_1^p \text{ que contraria a (5).}$$

Portanto, $J \cap K_p = \emptyset$ (9) para todo $p = 1, 2, \dots, k$;

porém, pelo lema acima,

$J \cap I_0 \neq \emptyset$, isto é, existe $y \in J \cap I_0$, donde

$y \in I_0 \subset K_0$ e $y \in J$, e pela (9) $y \in K_p$, $p = 1, 2, \dots, k$,

o que contraria a hipótese.