



O registro figural dinâmico e o desenvolvimento da visualização espacial

Matheus Lucca de Rocco, PPGEMAT/IME/UFRGS, roccomatheus08@gmail.com,
<https://orcid.org/0009-0000-6526-7927>

Márcia Rodrigues Notare, PPEMAT/IME/UFRGS, marcia.notare@ufrgs.com.br,
<https://orcid.org/0000-0002-2897-8348>

Resumo: Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa de mestrado, que teve como principal objetivo investigar como a mobilização de registros de representação semiótica pode contribuir para o desenvolvimento da visualização espacial e para a compreensão de objetos matemáticos no contexto da geometria espacial com estudantes do Ensino Médio. O aporte teórico da pesquisa é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval; os estudos sobre visualização espacial de Gutiérrez; e o estudo de registros figurais dinâmicos de Salazar e Almouloud. Apresentamos neste artigo a análise de uma das atividades, que aborda manipulação e visualização de seções planas no dodecaedro junto a uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola privada de Canoas/RS. Os resultados apontam que o trabalho com registros figurais dinâmicos, no GeoGebra, auxiliou no reconhecimento e relacionamento de características dos objetos estudados, condição que favorece a compreensão e o desenvolvimento da visualização espacial.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica, geometria espacial, visualização espacial.

The dynamic figural register and the development of spatial visualization.

Abstract: This article presents the results of a master's research, which aimed to investigate how the mobilization of semiotic representation registers can contribute to the development of spatial visualization and the understanding of mathematical objects in the context of spatial geometry with high school students. The theoretical framework of the research is based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers; Gutiérrez's studies on spatial visualization; and the study of dynamic figural registers by Salazar and Almouloud. In this article, we analyze one of the activities, which involves manipulation and visualization of plane sections in a dodecahedron with a group of high school students in their second year from a private school in Canoas/RS. The results indicate that working with dynamic figural registers in GeoGebra helped in recognizing and relating the characteristics of the studied objects, a condition that favors understanding and the development of spatial visualization.

Keywords: Semiotic Representation Registers, spatial geometry, spatial visualization.

1. Introdução

Utilizar recursos tecnológicos como uma possibilidade para desenvolver a aprendizagem de Matemática vem sendo uma necessidade cada vez maior. Cada vez mais pesquisas evidenciam ganhos na utilização desses recursos, trazendo diferentes perspectivas para abordar conceitos matemáticos. Reafirmando esse viés, podemos apresentar uma das competências específicas para o ensino de matemática segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC): “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (Brasil, 2017, p. 267).

Neste contexto, evidenciamos os Ambientes de Matemática Dinâmica (AMD), como por exemplo o *software* GeoGebra, que permitem ao usuário explorar e interagir dinamicamente com objetos matemáticos em diferentes registros de representações



semióticas, e que permitem que os estudantes sejam colocados em uma postura ativa na exploração e construção do conhecimento. Assim, nosso entendimento para o uso das tecnologias digitais na Educação Matemática direciona-se no sentido de criar oportunidades para o aluno “fazer matemática”, experimentar, manipular, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair e generalizar. Queremos possibilitar que esses recursos proponham possibilidades para o desenvolvimento do pensamento matemático, que levem à resolução de um problema ou à construção de conceitos, e não como apenas como alternativa ao quadro e giz, mas que reproduz as mesmas práticas que poderiam ser realizadas com eles.

Além disso, o GeoGebra possibilita o trabalho com diferentes registros de representações para um objeto matemático (geométrica, gráfica, algébrica, etc). Essa característica do *software* alinha-se ao que Duval (2011) defende sobre a importância do trabalho com diferentes representações de um objeto matemático, para proporcionar o desenvolvimento do conhecimento matemático. O *software* também proporciona a visualização das representações construídas, o que se mostra essencial para o desenvolvimento do pensamento geométrico (Gutiérrez, 1996).

Na perspectiva de contribuir para as pesquisas e discussões sobre as potencialidades do AMD no desenvolvimento da visualização espacial, apresentaremos neste artigo a análise de uma das atividades desenvolvidas em uma pesquisa de mestrado, em que o principal objetivo foi estudar como a mobilização de diferentes registros de representações semióticas pode desenvolver o processo de visualização espacial e a compreensão de objetos matemáticos. A atividade apresentada buscou mobilizar os registros figural dinâmico e língua-materna, na qual exploramos com estudantes a construção de uma seção plana dinâmica no dodecaedro para analisar as habilidades de visualização destes estudantes ao manipularem e modificarem as possíveis seções planas.

Apresentamos a seguir, o quadro teórico que serviu como pano de fundo e lente de análise para o desenvolvimento da pesquisa. Apresentamos algumas reflexões sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e sobre as ideias de visualização espacial concebidas por Àngel Gutiérrez. Trazemos uma breve apresentação do *software* GeoGebra e, em seguida, apresentamos a metodologia utilizada nesta pesquisa e a atividade explorada. Assim, realizamos uma análise sobre os resultados das produções dos estudantes. Por fim, as considerações finais são apresentadas, as quais reúnem as reflexões sobre a pesquisa.

2. Registros de Representação Semiótica

A aprendizagem de matemática passa por processos próprios, visto que os objetos de estudo na matemática não são acessíveis de maneira imediata. Durante esse processo de aprendizagem, a habilidade de representar tais objetos e suas características é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Duval (2012) afirma que uma das palavras mais importantes na matemática é “representação”. Para este autor, na maioria das vezes “representação” é tratada com o significado do verbo “representar”, de modo que usamos determinados meios para representar algum objeto, ou conceito matemático, como por exemplo: a descrição de uma figura, uma expressão algébrica, um gráfico ou uma figura geométrica. A matemática, aborda, necessariamente, objetos abstratos, ou seja, objetos que não podemos acessar diretamente através da percepção ou experiência intuitiva. Assim necessitamos de representações desses objetos para que possamos compreender suas características e propriedades. Podemos citar como exemplo do campo da geometria, as figuras geométricas: uma figura geométrica pode ser representada por meio de uma organização de traços em uma folha, ou por uma descrição no registro escrito. Por meio das representações semióticas é que podemos acessar tais objetos, assim como termos a



possibilidade de desenvolver uma compreensão mais aprofundada sobre esses objetos, pois “o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas” (Duval 2003, p. 21).

Desse modo, é importante não confundir um objeto matemático com suas possíveis representações, caracterizando assim um paradoxo cognitivo, uma vez que só temos acesso a suas representações. Segundo Duval (2012, p. 268), “Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?”. É vital ressaltar esse ponto, pois a confusão entre um objeto matemático e sua representação pode gerar um obstáculo para o processo de aprendizagem, visto que quando trabalhamos com representações diferentes podemos acessar diferentes características sobre o mesmo objeto matemático e assim, ampliar nossa compreensão.

Nesse sentido, Duval (2012) afirma que as representações semióticas são entendidas como produções que utilizam signos pertencentes a sistemas específicos de representação, cada um com suas particularidades em termos de significado e funcionamento. Exemplos disso incluem figuras geométricas, enunciados em língua natural, fórmulas algébricas e gráficos. Estes sistemas específicos de representação são definidos como registros de representação semiótica quando permitem as três atividades cognitivas fundamentais apontadas por Duval: a formação de uma representação identificável; o tratamento de uma representação e a conversão dessa representação para outro tipo de registro.

Segundo Duval (2010), a mudança entre sistemas de representação pode não ser evidente para os estudantes, gerando um obstáculo para a compreensão global do objeto matemático em estudo. Esta dificuldade se mostra quando os estudantes não encontram relações entre as diferentes representações de um mesmo objeto, como por exemplo uma representação figural de um sólido geométrico e sua representação em língua natural. Desse modo, Duval entende que, para que uma atividade matemática possa desencadear compreensão, a condição implícita é que mobilizemos pelo menos dois tipos de registros de representação, visto que quanto mais acesso a diferentes representações, que apresentam diferentes características do objeto de estudo, mais relações entre essas características podem ser feitas e as possibilidades de confundir o objeto matemático com uma de suas representações podem ser minimizadas ou, até mesmo, eliminadas.

No caso da geometria, Duval (2011) afirma que a geometria se desenvolve em principalmente dois registros distintos: o das figuras e o da língua natural. O registro figural apresenta características que dão um poder cognitivo particular de acesso à forma da figura e algumas propriedades, de modo que o registro da língua natural apresenta definições, hipóteses, teoremas. Com relação às figuras o autor afirma que estas possuem um valor intuitivo, frequentemente resumido na ideia de que “se vê diretamente sobre a figura”, dispensando explicações adicionais. Elas permitem o reconhecimento imediato dos objetos que representam, como ocorre com imagens de quadrinhos, croquis, caricaturas ou esquemas. Além disso, o autor observa que, ao contrário de outras imagens, as figuras geométricas são construídas de forma instrumental, utilizando régua e compasso ou *software*, uma vez que desenhos à mão livre não possibilitam a distinção precisa entre uma reta e uma curva, nem permitiriam analisar corretamente as relações entre grandezas (Duval, 2011). E é no contexto das figuras geométricas espaciais que situamos este artigo, abordando a seguir aspectos do processo de visualização espacial.

3. Visualização Espacial

Segundo Gutiérrez (1996) a visualização espacial está ligada ao estudo e ao uso de vários tipos de representações, estas apoiando-se em elementos visuais, espaciais, mentais ou físicos. O autor refere-se a quatro representações que formam a visualização espacial:



imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização.

Para Gutiérrez (1996) a *imagem mental* é uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática que contenha informações baseadas em elementos figurais, gráficos ou diagramáticos. O autor entende que a *imagem mental* é uma base para construção de uma visualização, os estudantes devem aprender a construir um poliedro. A imagem dinâmica são as imagens que envolvem a manipulação mental de um objeto, ou de suas partes, permitindo ter uma visão do objeto que não podia ser acessada. A imagem cinestésica envolve a movimentação de um objeto buscando transformar e analisar essas imagens (Gutiérrez, 1996, p.25)

Presmeg (1986) levanta três tipos de *imagens mentais*. A imagem estática, que é do tipo de imagem figural realizada a partir de objetos estáticos, como o exemplo o desenho de um poliedro. A imagem dinâmica que são as imagens que envolvem a manipulação mental de um objeto, ou de suas partes, permitindo ter uma visão do objeto que não podia ser acessada. A imagem cinestésica envolve a manipulação usando partes do corpo, ou seja, simular que uma parte do corpo é o objeto em questão para auxiliar a movimentação mental.

A *representação externa* diz respeito à utilização de representações verbais, gráficas, figurais, diagramáticas que façam relação com a visualização, permitindo criar uma ligação entre essas representações e as *imagens mentais*.

Já os *processos de visualização* são trazidos como uma ação mental ou física que envolva a *imagem mental*. Gutiérrez (1996) fala de dois processos que se mostram nesse momento: interpretação de informação visual, cujo objetivo é criar uma *imagem mental* e a interpretação de imagens mentais, que busca formar informações.

Quando falamos de habilidades de visualização, estamos nos referindo a uma série de habilidades necessárias para realizarmos os processos anteriores. “O aprendizado e polimento dessas habilidades é a chave para todo o processo de visualização espacial” (Gutiérrez, 1996, p.26). Segundo Gutiérrez são elas:

- Percepção figura-fundo: A habilidade de identificar uma figura mesmo que isolada de um contexto complexo.
- Constância perceptiva: a habilidade de não confundir as características e propriedades de um objeto mediante sua movimentação ou espessura do traço de sua representação, cor ou tamanho.
- Rotação mental: a habilidade de construir imagens mentais dinâmicas e imaginá-las em movimento.
- Percepção de posições espaciais: a habilidade de construir relações entre objetos observados e o próprio observador.
- Percepção de relações espaciais: a habilidade de construir as relações entre os objetos observados.
- Discriminação visual: é a habilidade de observar as diferenças ou semelhanças entre objetos, imagens ou imagens mentais. (Gutiérrez, 1996)

A seguir, abordaremos os AMD e suas relações com os registros de representações semióticas e o desenvolvimento das habilidades de visualização.

4. Ambientes de Matemática Dinâmica

Basso e Notare (2015, p. 4) afirmam que “o uso das tecnologias na Educação Matemática deve considerá-la como uma ferramenta que leve o estudante a compreender que pode se tornar um sujeito capaz de criar e pensar em Matemática”.

Dentre vários recursos tecnológicos disponíveis para serem trabalhados na Educação Matemática, existe um destaque para aqueles que proporcionam meios interativos e



dinâmicos. Segundo Basso e Notare (2015) estes recursos dinâmicos e interativos proporcionam um ganho de compreensão, já que podemos acessar e manipular as representações construídas nesses ambientes. Desse modo, os recursos tecnológicos e a possibilidade de representação e manipulação de objetos matemáticos possibilitam novos caminhos para o pensamento matemático.

Chamamos essas ferramentas que proporcionam recursos tecnológicos e interativos e dinâmicos de Ambientes de Matemática Dinâmica (AMD), os quais possibilitam construções de diferentes tipos de representações de objetos matemáticos com possibilidades de movimentação, o que os caracteriza como ambientes dinâmicos. Segundo Moreno-Armella et al. (2008, p. 102) “Os sistemas de notação evoluíram de novas maneiras com novas explorações matemáticas, até então impossíveis ou impraticáveis no meio estático”.

Nessa perspectiva, Basso e Notare (2015, p.5) afirmam que,

Em ambientes de GD¹, é possível alcançar um nível elevado de realismo para representar diferentes objetos matemáticos, pois oferecem a possibilidade de manipulação direta de construções geométricas, que permitem visualizar conceitos de geometria a partir do estudo de propriedades invariantes dessas construções enquanto seus componentes são movimentados na tela.

Temos então um espaço onde uma representação geométrica torna-se manipulável, dando a oportunidade de experimentação com construções feitas pelo aluno. Nesses ambientes, o aluno pode expressar suas ideias, em um processo de construção, exploração e experimentação, mobilizando as representações na tela, o que pode contribuir para a compreensão do conceito abstrato do objeto matemático.

Como recurso central dos AMD temos a ação de arrastar, que altera a natureza de uma construção geométrica, mas sem alterar seu conceito, já que as propriedades do objeto não são alteradas. Essa opção permite que mudemos a maneira como vemos uma construção geométrica, saindo da sua forma de representação discursiva, estática, para uma forma fluida e dinâmica (Basso e Notare, 2015).

Chaachoua (1997, apud Salazar e Almouloud, 2015) afirma que os AMD possibilitam a validação de conceitos e propriedades matemáticas por meio de experimentação. Ainda assim, as contribuições que a geometria dinâmica pode apresentar para a compreensão da geometria está ligada às decisões feitas pelo criador do ambiente, sejam elas: modo de apresentação das convenções adotadas, os tratamentos permitidos e as ações e modificações possíveis. O pesquisador afirma também considerar três aspectos principais: a manipulação direta, a escolha das representações e os primitivos geométricos. Pois através desses elementos é possível construir e explorar figuras geométricas complexas, verificar conjecturas e realizar transformações de objetos geométricos. Tais ações seriam difíceis, ou até impossíveis, de realizar apenas com lápis e papel, pois essas ferramentas oferecem um domínio de funcionamento mais limitado em comparação com ambientes digitais e dinâmicos.

Os AMD também possibilitam ver uma figura como um conjunto de engrenagens formadas por unidades figurais 0D, 1D ou 2D. Segundo Mithalal (2011, apud Salazar e Almouloud, 2015), podemos fazer uma análise de desconstrução dimensional na figura, de modo que:

A desconstrução dimensional consiste em ver a representação de um objeto como um agrupamento de unidades figurais por suas propriedades geométricas. Este último ponto é fundamental porque designa o papel dessas propriedades nesse processo: não é suficiente isolar as unidades figurais, é necessário também organizá-las geometricamente (p.115).

¹ A abreviação GD refere-se à Geometria Dinâmica



Ou seja, a desconstrução dimensional permite que consigamos transformar uma figura em outra de mesma dimensão, ou dimensão inferior e identificar suas unidades figurais.

A partir das evidentes mudanças no processo cognitivo que acontecem quando se usa AMD, Salazar e Almouloud (2015) apontam que surgem novas representações, configurando um novo sistema de representação, cunhado pelos autores como registro de representação figural dinâmico. Como retratamos anteriormente, um registro é caracterizado pela existência de uma representação identificável, que tenha a possibilidade de realizar tratamentos e conversões para outros registros.

Consequentemente, concordamos com os pesquisadores quando afirmam que ao se utilizar esses ambientes de matemática dinâmica, as três atividades cognitivas, sendo elas formações, tratamentos e conversões, mostram-se nesses ambientes de maneira diferente. Considerando o dinamismo destes ambientes, os autores sugerem os termos formação dinâmica, tratamentos dinâmicos e conversões dinâmicas.

Para Gravina (2015) a manipulação de representações figurais dinâmicas oferecida pelo AMD, possibilita um novo tipo de tratamento para o componente de desenho do registro figural, pois as variações de representações substituem um desenho particular e estático presentes em livros didáticos ou no quadro escolar. Estes últimos, deixando características e propriedades escondidas, podendo levar à produção de uma imagem mental inadequada.

5. Metodologia de Pesquisa

A pesquisa abordada neste artigo buscou investigar: *Como a mobilização de diferentes representações semióticas desenvolve o processo de visualização espacial para a compreensão de objetos matemáticos?* Para isso, foi elaborada uma sequência de atividades que visavam mobilizar diferentes representações semióticas, como representações figurais e figurais dinâmicas e representações em língua materna.

Neste artigo abordamos uma das atividades elaboradas, cujo objetivo foi explorar as habilidades de visualização espacial durante a manipulação de seções planas de um dodecaedro regular.

Realizamos esta pesquisa com seis estudantes da turma de segundo ano do Ensino Médio (Estudantes A, B, C, D, E e F), escola da rede privada de Canoas/ RS. A atividade foi realizada em caráter remoto, por meio de uma videochamada utilizando o software *Discord*. A coleta de dados foi feita por meio de recursos de gravação de vídeo e áudio do encontro, diário de bordo do professor e produções desenvolvidas pelos estudantes.

Esta pesquisa teve caráter qualitativo, fundamentada principalmente nas ideias de Bodgan e Biklen (1994), visto que temos como objetivo analisar como o trabalho com diferentes representações semióticas pode influenciar o desenvolvimento do pensamento dos estudantes e sua compreensão, neste caso utilizando os registros de representação em língua materna, figurais e figurais dinâmicos.

Participaram da pesquisa seis estudantes, que primeiramente realizaram a atividade individualmente, elaborando suas próprias conjecturas e tirando suas próprias conclusões, para posteriormente compartilhar suas produções para discussão no grande grupo.

A atividade consistiu em explorar um *applet* com a construção dinâmica de uma seção plana determinada pelo plano perpendicular a uma das diagonais do dodecaedro, com o intuito de permitir a exploração e conjecturas sobre possíveis relações entre o plano de corte e as figuras formadas pelo mesmo (Figura 1).

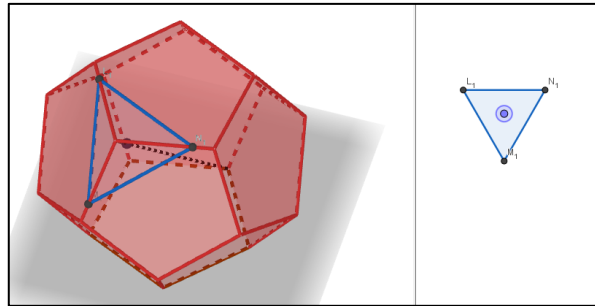


Figura 1 - Applet utilizado na atividade - Seção do dodecaedro em 3D e vista 2D da figura formada pela seção

Escolhemos o dodecaedro para esta atividade pois apresenta um número maior de faces, arestas e vértices, consequentemente, possui um grau de complexidade maior que o cubo ou o tetraedro, possibilitando novos desafios para o desenvolvimento das habilidades de visualização espacial.

Nesta atividade, queremos investigar como a manipulação de representações figurais dinâmicas pode impactar nas habilidades de visualização dos estudantes, como construções de imagens mentais a partir de informações visuais possibilitadas pelo AMD, de modo que consigam acessar características e propriedades dos planos de seção do dodecaedro, que poderiam ter o acesso limitado quando trabalhado com representações figurais estáticas, como um desenho em papel ou um sólido de papelão. Por meio do tratamento acelerado que o registro figural dinâmico proporciona, buscamos observar quais características podem ser evidenciadas pela exploração dessas representações. Buscamos analisar se os estudantes conseguem identificar quantas, e quais são as figuras que podem ser determinadas com a movimentação do plano.

6. Análises dos resultados

A atividade é um recorte de uma sequência mais ampla, que constituiu a pesquisa em questão. Nesta atividade, era a segunda vez que os estudantes entravam em contato com o GeoGebra, apresentando ainda pouca familiaridade com o AMD.

Primeiramente, os estudantes engajaram-se na atividade de forma individual, manipulando, explorando e conjecturando sobre a construção para identificar características entre o dodecaedro e a figura que é formada pela seção plana dinâmica.

No segundo momento, o professor-pesquisador realizou perguntas instigadoras para que os estudantes discutissem e testassem as imagens mentais que estavam constituindo sobre as seções planas, por meio da manipulação que o GeoGebra proporciona.

A seguir, apresentamos excertos de falas, discussões e produção que os estudantes realizaram no desenvolvimento dessa tarefa.

Ao manipularem o controle deslizante que movimenta o plano de corte no dodecaedro, os estudantes perceberam uma natureza diferente da seção do plano, que se modifica com o dinamismo do plano em movimento e que se diferencia das atividades anteriores, que envolviam cubo e tetraedro regular. No entanto, os estudantes não apresentavam argumentos que justificassem o que estava ocorrendo com as seções observadas. Assim, o professor fez o questionamento “*O que vocês observam ao movimentar o plano?*”. Com a discussão iniciada, o Estudante A comenta “*Acho que é porque tudo tá se mexendo junto, tipo, tudo se mexe quando a gente mexe naquele ponto do canto (controle deslizante)*”. Complementando, o Estudante B ressalta “*A única coisa que nunca muda é aquele ponto no meio do polígono, acho que tem algo a ver com ele.*”.

Percebe-se, pelas conjecturas verbalizadas, que o Estudante A foi capaz de perceber que o controle deslizante controla a altura em que a seção do plano corta o sólido, de modo que, o utilizou para justificar o comportamento das seções dos planos.

Identificamos que A inicia um processo de conversão do registro figural dinâmico para o registro em língua natural, a partir de interpretações da informação visual proporcionada pelo AMD. Mas podemos perceber que houve uma identificação de características mais amplas do que foi expressado em sua fala, quando percebe que diferentes unidades figurais estão conectadas (como os lados da figura formada pela seção plana), e por isso são alteradas simultaneamente. Entendemos que o estudante não consegue expressar tudo que está visualizando, não consegue verbalizar como essas características estão relacionadas, apenas que estão relacionadas. Em outras palavras, podemos perceber que existem dificuldades no tratamento no registro em língua natural, seja por limitações desse registro para descrever a imagem mental que está sendo constituída, ou por dificuldades de desenvolver alguma das três funções cognitivas do registro em língua natural, pertinentes à aprendizagem matemática segundo Duval (2003).

Para provocar reflexões sobre as possíveis seções planas que podem ser formadas, o professor questionou sobre qual figura com maior número de lados possíveis pode ser formada movimentando o plano de corte do dodecaedro. Como os estudantes já tinham percebido que o controle deslizante alterava apenas uma característica do plano, o processo de experimentação e exploração da construção passou a ocorrer de forma mais controlada, para retirar informações pertinentes para a solução do problema.

O Estudante C decidiu compartilhar sua tela, alterando a figura mediante a movimentação do plano de seção, realizando tratamentos dinâmicos sobre as representações figurais dinâmicas que se formavam na tela do computador. Primeiro, C argumentou que existia um limite de figuras que poderíamos determinar com o plano, sendo a maior possível quando o plano cortava o dodecaedro na “metade”, formando um hexágono regular. Ao ser questionado sobre o porquê de ter classificado a figura como regular, C argumenta *“Até a gente chegar na metade dele (dodecaedro) tem um momento que começa a aparecer um hexágono, mas é todo errado. Só que quando a gente vai chegando mais perto do meio vai ficando mais perfeitinho.”*.

Podemos ver na Figura 2, as representações que o Estudante C produziu para chegar na conjectura de que existiria um hexágono “perfeitinho” na metade do dodecaedro.

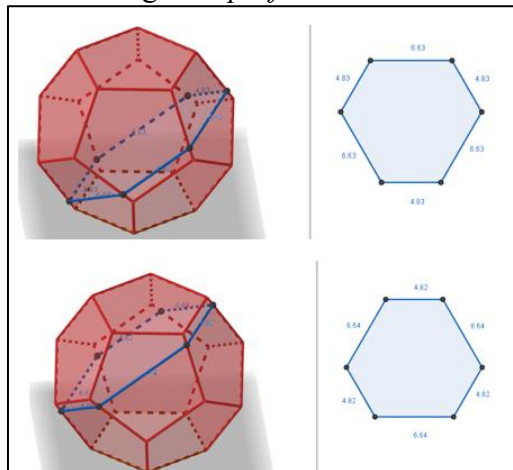


Figura 2 - Comparação dos lados dos polígonos em função da mudança do controle deslizante

O Estudante C, a partir da exploração no ambiente dinâmico, conseguiu estabelecer uma relação entre a figura formada na seção plana com o dodecaedro, de modo a compreender que as medidas dos lados se alteram de acordo com o local onde o corte é realizado no sólido. Além disso, a partir de uma análise qualitativa da situação, consegue

perceber que deve existir um local onde essa figura vai ficar “*perfeitinha*”, ou seja, regular (Figura 3).

Essas conjecturas foram possibilitadas pelo AMD, já que a manipulação do plano que controla a seção plana permite visualizar as transformações dinâmicas realizadas no registro figural dinâmico. Essas transformações dão suporte para a visualização espacial dos estudantes, que podem criar imagens mentais e interpretá-las de modo a formar uma base para a construção da visualização (Gutiérrez, 1996). Conforme Salazar e Almouloud (2015), a aceleração de tratamentos feitos quando utilizamos AMD, e o processo de retroalimentação, que podem ser visualizados no momento em que o estudante manipula o objeto geométrico, possibilita a construção de conjecturas e a construção de imagens mentais sobre as possíveis formas de seções planas de um dodecaedro regular.

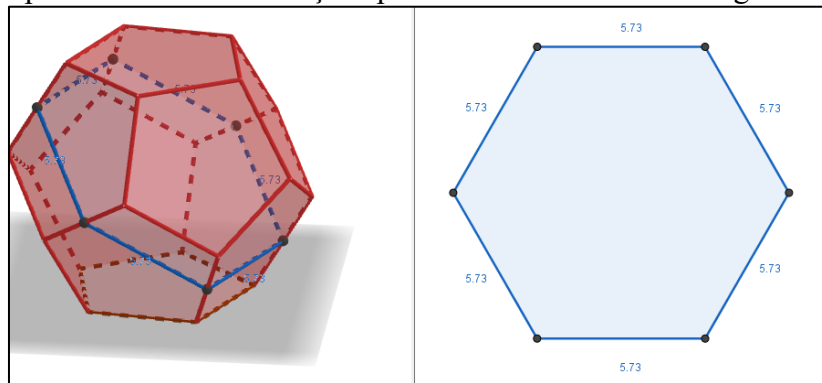


Figura 3 – Seção hexagonal regular que corta o dodecaedro no meio

A partir da justificativa de C, o Estudante A comenta que é possível formar um triângulo equilátero também, e acrescenta que “...*ele começa a aparecer logo no começo, mas vai ficar sempre igual, só muda o tamanho.*”. Identificamos aqui que A reconhece que as seções planas, nestes casos, serão sempre triângulos equiláteros, mudando apenas as medidas de seus lados

Expandindo a discussão, o professor pergunta se é possível formar uma figura com mais do que seis lados caso o plano estivesse em uma inclinação diferente da apresentada pelo *applet*, exigindo que os estudantes utilizassem a habilidade de visualização de percepção de relações espaciais (Gutiérrez, 1996). Imediatamente, o Estudante B responde que sim, o professor utiliza a fala de B para desenvolver uma conjectura: *Será que a figura com o maior número de lados possíveis é sempre igual ao número de faces do sólido?* Neste momento, os estudantes defendem que a conjectura é verdadeira, já não mais apoiados no *applet*, mas apoiados em habilidades de visualização espacial. Porém, para testá-la, deveriam determinar se existia uma figura com doze lados formada por um plano de seção, sem ser necessariamente aquele apresentado no *applet*. Contudo ao manipular a construção dinâmica, buscando identificar como deveria ser esse que gera uma figura de doze lados, os estudantes não conseguiram visualizar onde estaria localizado esse plano, sem uma representação no AMD. Identificamos que seria necessário um novo *applet* com a representação da nova situação proposta para dar suporte às construções mentais dos estudantes.

É possível observar que o processo de mobilização das representações figurais dinâmicas possibilitou que os estudantes conseguissem estabelecer relações entre a figura dinâmica formada pelo plano de seção com o dodecaedro, conseguindo identificar unidades figurais que não estavam apresentadas na construção, como o comprimento do plano dentro do sólido, uma de suas diagonais e formato das figuras resultantes. Desse modo, percebemos que a mobilização desses dois tipos de registros possibilitou que os estudantes observassem características sobre as figuras que não estavam explícitas apenas



com a representação figural, mas que se mostraram acessíveis ao manipular a representação figural dinâmica, concordando com Duval (2012), que defende que o desenvolvimento de atividades matemáticas com mais de um tipo de registro possibilita a compreensão sobre o objeto matemático sendo estudado.

7. Considerações finais

Ao longo deste artigo, apresentamos a análise de uma atividade desenvolvida em ambiente de geometria dinâmica com alunos do segundo ano do Ensino Médio, contemplando o estudo de seções plana em um dodecaedro regular. Esta proposta utilizou como quadro teórico a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, tendo o interesse de observar como o trabalho com diferentes representações semióticas pode ampliar a compreensão e visualização de objetos matemáticos, através do dinamismo que o GeoGebra proporciona.

Observamos nesta atividade que os estudantes foram capazes de explorar e manipular a construção do GeoGebra e conseguiram estabelecer relações entre a figura formada pelo plano de seção com o dodecaedro, através das manipulações e conjecturas feitas pelos mesmos. Além disso, os dados mostraram que os estudantes conseguiram identificar unidades figurais que não estavam apresentadas de modo explícito na construção, fazendo uso de habilidade de visualização espacial que possibilitam buscar e identificar diferentes características que podem ser acessadas na construção.

O estudo de seções planas de sólidos geométricos, sem a utilização de AMD, geralmente ocorre por meio de representações de figuras planas ou modelos concretos físicos, que apresentam limitações para modificar ou explorar múltiplas representações. Essas abordagens podem restringir o acesso dos estudantes a relações espaciais mais complexas, como a variação dinâmica de formas geométricas com base em alterações no plano de corte. Diferentemente disso, no contexto desta pesquisa, a manipulação dinâmica no GeoGebra permitiu que os estudantes observassem e descrevessem propriedades geométricas de forma mais detalhada como a identificação de características invariantes e regulares das figuras formadas pelas seções planas.

Embora não tenhamos conduzido um experimento comparativo formal entre aulas com e sem o uso do software, estudos prévios (Salazar e Almouloud, 2015; Basso e Notare, 2015) também sugerem que o uso de Ambientes de Matemática Dinâmica (AMD) traz contribuições para a compreensão e visualização espacial. Esses achados, aliados aos resultados desta pesquisa, indicam que a integração de tecnologias como o GeoGebra pode superar desafios enfrentados no desenvolvimento de habilidades de visualização espacial, ampliando as possibilidades de exploração e compreensão de conceitos matemáticos.

8. Referências

BASSO, M.; NOTARE, M. R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Renote**, v. 13, n. 2, 2015.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2017.

BOGDAN R. C.; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**, Portugal: Porto Editora, 1994.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003



DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S, D, A. **Aprendizagem em Matemática. Registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus Editora, 2010.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representações semióticas. 1º. ed. São Paulo, SP: Editora Proem, 2011. v. 1.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Mércles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266-297, 2012.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In: PUIG, L.; GUTIÉRREZ, A. (ed.) **Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education**. Valencia: Universidad de Valencia. 1996. v. 1, pp. 319.

GRAVINA, M. A. **A Matemática na escola informatizada**, IMUFRGS, II Biental da SBM, 2004.

PRESMEG, N. C. **Visualization in high school mathematics**. For the Learning of Mathematics, v. 6, n. 3, p. 42-46, nov. 1986.

SALAZAR, J. V. F; ALMOULOU, S. A. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática pesquisa**. v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015.