

**AVALIAÇÃO DA ESTIMATIVA DO RISCO DE MERCADO DE AÇÕES E OPÇÕES
DE COMPRA DA PETROBRÁS UTILIZANDO A METODOLOGIA *VALUE AT RISK*
(VaR) COM SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO**

Fábio Luiz de Oliveira Bezerra¹

Av. Prof. Moraes Rego, 1235 – Cidade Universitária
CEP: 50670-901 Recife/PE Brasil
E-mail: carmona@npd.ufpe.br

Charles Ulises De Montreuil Carmona¹

Av. Prof. Moraes Rego, 1235 – Cidade Universitária
CEP: 50670-901 Recife/PE Brasil
Tel: (81) 3271.8368
E-mail: carmona@ufpe.br

¹ Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Departamento de Ciências Administrativas
CEP: 50670-901 Recife/PE Brasil

Resumo:

Este trabalho tem o intuito de avaliar a capacidade da abordagem *Value at Risk* com simulação de Monte Carlo (SMC), na previsão do risco de mercado da ação da Petrobrás (PETR4) e das opções de compra da PETR4 (PETRJ39, PETRH6, PETRH5). Compara-se a performance da SMC com os métodos denominados paramétricos: para a carteira de ações, considera-se o modelo do desvio padrão, e, para as opções, utilizam-se aproximações Delta e Delta-Gama. A SMC para as opções é obtida pelos seguintes modelos de precificação do valor da carteira: o de Black & Scholes (SMC Univariada), o de Hull & White, que inclui volatilidade estocástica (SMC Bivariada), e, por último, a inclusão da taxa de juros também estocástica através do modelo de Rendleman e Bartter (SMC Trivariada). As evidências empíricas sugerem que a estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo supera a dos métodos paramétricos, notadamente em carteiras não-lineares.

Palavras-chave: Risco de mercado, Value at Risk, simulação de Monte Carlo.

AVALIAÇÃO DA ESTIMATIVA DO RISCO DE MERCADO DE AÇÕES E OPÇÕES DE COMPRA DA PETROBRÁS UTILIZANDO A METODOLOGIA *VALUE AT RISK* (VaR) COM SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

1. Introdução

A abordagem *Value at Risk* (VaR) tem sido uma das técnicas mais utilizadas no gerenciamento de risco tornando-se padrão na indústria bancária. Uma grande vantagem da estimativa do risco através do VaR consiste na capacidade de mensurar e agregar diversas posições de risco de toda a instituição em um único valor. Isso torna a compreensão muito mais fácil do nível de risco da empresa para seus diretores, acionistas e investidores.

Embora a abordagem do VaR para a estimativa do risco de mercado seja de fácil entendimento, existem diversas metodologias para sua obtenção, cada uma apoiando-se em suposições diferentes quanto às características dos fatores de risco de mercado e adequando-se melhor a diferentes perfis de composição da carteira. Conforme destacam Hull e White (1987), os modelos matemáticos e estatísticos mais utilizados para o cálculo do VaR (metodologia paramétrica) admitem que retornos diários das variáveis de mercado (preço de ativos, taxas de juros, câmbio) seguem uma distribuição de probabilidade do tipo normal. Na prática, as séries de retornos diários dessas variáveis apresentam assimetria e significativos graus de curtose.

Por outro lado, a simulação de Monte Carlo parece ser uma metodologia confiável e abrangente para a mensuração de riscos financeiros, e capaz de capturar uma grande variedade de riscos, inclusive de preço, de volatilidade e de crédito.

É conveniente, portanto, realizar uma análise de acuidade das metodologias para o cálculo do VaR, comparando-se a estimativa de perda potencial de uma carteira medida pelo VaR com a perda efetiva ou real observada após a passagem do tempo.

2. Referencial teórico

Jorion (2000) estabelece uma definição formal para tal medida: “o VaR mede a pior expectativa de perda durante um certo período de tempo, sob condições normais de mercado e com um dado nível de confiança”. Considerando-se VC_0 o valor da carteira no momento inicial e R a sua taxa esperada de retorno no final do horizonte de tempo, o valor esperado da carteira após o horizonte determinado será de $VC = VC_0(1 + R)$, também define VaR como a perda da carteira relativa ao seu valor esperado:

$$VaR = VC - VC^* = VC_0(R - R^*)$$

onde VC^* é o valor esperado mínimo admitido para a carteira referente ao nível de significância desejado, e R^* é o retorno associado a VC^* .

O VaR pode ser definido como a perda absoluta da carteira, ou seja, relativa a zero ou sem referência com o valor esperado da carteira:

$$VaR = VC_0 - VC^* = -VC_0 R^*$$

Esta última forma é a comumente utilizada no meio acadêmico e de mercado, pois representa a perda real da carteira em relação ao momento em que está se medindo o VaR.

Para encontrar o valor mínimo esperado, necessita-se estabelecer um nível de confiança e conhecer a função de distribuição de probabilidade futura da carteira de ativos ou do retorno da carteira, respectivamente quando se calcula o VaR do valor da carteira ou de retorno. Considerando a função de distribuição de probabilidade do valor futuro da carteira, $f(x)$, a determinado nível de confiança, q , deseja-se descobrir a pior realização possível para a carteira, VC^* , tal que a probabilidade de exceder esse valor seja q :

$$q = \int_{VC^*}^{\infty} f(x) \cdot dx$$

ou tal que a probabilidade de um valor menor que VC^* , $p = P(x \leq VC^*)$, seja $1-q$:

$$1 - q = \int_{-\infty}^{VC^*} f(x) \cdot dx = P(x \leq VC^*) = p$$

Portanto, tem-se que $VC^* = F^{-1}(p)$, que corresponde ao valor do quantil de probabilidade p , onde F^{-1} é a função inversa de densidade de probabilidade. Daí:

$$VaR = VC_0 - VC^* = VC_0 - F^{-1}(p)$$

Se não há a função de distribuição de probabilidade analiticamente, deve-se proceder empiricamente à construção da distribuição do valor da carteira e calcular o quantil pela ordenação direta das freqüências de ocorrências dos valores.

Como se vê, o VaR é obtido do quantil da função de distribuição de probabilidade da carteira, logo sendo aplicado a qualquer distribuição, seja ela normal ou não, discreta ou contínua, com cauda grossa ou fina. Se a distribuição for normal, considerando μ e σ , respectivamente, média e desvio padrão, o quantil genérico p é a função inversa de distribuição normal cumulativa de probabilidade $\Phi^{-1}(p)$. Para as distribuições normais, o VaR é dado por:

$$VaR = VC_0 \cdot \mathbf{as} \quad (2-1)$$

onde α é desvio normalizado para a significância selecionada, σ é o desvio padrão e VC_0 é o valor inicial da carteira do momento do cômputo do VaR.

Para carteira com vários fatores de risco, a função de distribuição de probabilidade da carteira é obtida a partir da distribuição dos fatores de risco ou variáveis financeiras aos quais está exposta a carteira. Considerando-se que as variáveis aleatórias que representam os fatores de risco são dados por X_1, \dots, X_d , a função que representa o valor da carteira, que pode ser uma função perda ou modelo de precificação da carteira, será dada por $\mathbf{h} = L(X_1, X_2, \dots, X_d)$. Denota-se F_L como a função de distribuição cumulativa de probabilidade da função perda, $F_L(l) = \Pr(\mathbf{h} < l)$. Considerando G a função de distribuição multivariada das variáveis X_1, \dots, X_d , a função de distribuição cumulativa é:

$$F_L(l) = \Pr(L(X_1, \dots, X_d) < l) = \int_0^{l \in \mathbb{R}^d} [L(X_1, \dots, X_d)] dG(X_1, \dots, X_d) \quad (2-2)$$

O cálculo do VaR consiste, então, na estimativa do quantil: para um dado p , encontrar l_p tal que $F_L(l_p) = p$. Então VaR é dado por $l_p = F_L^{-1}(p)$. Portanto, para calcular o VaR é preciso aproximar a inversa da função de distribuição cumulativa de probabilidade da função de perda da carteira.

2.1 Modelos de precificação de opções

Para calcular o VaR de contratos não-lineares como, por exemplo, contratos de opções, torna-se fundamental determinar o modelo de precificação dos mesmos, que, subtraído do valor inicial da carteira, representa a função perda do valor da carteira.

Existe uma série de modelos matemáticos para o cálculo dos prêmios de opções. O modelo proposto por Black & Scholes (1973) – B&S – foi a primeira solução para a fórmula de equilíbrio geral na avaliação do prêmio de opções. No caso de opções do tipo européia, B&S apresentaram as seguintes fórmulas para a avaliação dos seus prêmios:

Para opção de compra:

$$c = S \cdot N(d) - K \cdot e^{-R \cdot (T-t)} \cdot N(d - s \sqrt{T-t}) \quad (2-3)$$

Para opção de venda:

$$p = S \cdot N(-d) + K \cdot e^{-R \cdot (T-t)} \cdot N(s \sqrt{T-t} - d)$$

Como sabemos, o modelo B&S parte do pressuposto de que o ativo objeto tem um comportamento estocástico contínuo, na forma de movimento geométrico *browniano*. Isto quer dizer que se assume que a distribuição probabilística dos preços do ativo objeto, em uma data futura, é log-normal e, por conseguinte, a distribuição probabilística das taxas de retorno

calculadas continuamente, e composta entre duas datas. O preço da ação é a solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dw(t)$$

onde $S(0) = S_0 > 0$, $w(t)$ é um processo de Wiener, com tendência instantânea e desvio dados, respectivamente, por σ e m .

Um modelo alternativo ao B&S é o proposto por Hull e White (1987), no qual pressupõem-se as mesmas hipóteses de B&S, exceto a que se refere ao comportamento do preço e da volatilidade. Neste, o preço de uma ação assume um processo estocástico mais geral e a volatilidade é assumida como estocástica, da seguinte forma:

$$dS_t = m(S_t, \mathbf{s}_t, t)S_t dt + \mathbf{s}_t S_t dw(t)$$

$$dV_t = \mathbf{f}(\mathbf{s}_t, t)V_t dt + \mathbf{x}(\mathbf{s}_t, t)V_t dz(t)$$

onde $V_t = \mathbf{s}_t^2$ é a variância instantânea dos retornos, $w(t)$ e $z(t)$ são dois processos de Wiener independentes entre si, e S_t é o preço da ação no instante t .

Hull e White (1987) demonstram que, quando a volatilidade não é correlacionada com o preço da ação, pode-se escrever o valor de uma opção de compra europeia em t como:

$$c(S_t, \mathbf{s}_t, t) = \int c_{BS}(\bar{V}) f(\bar{V} | \mathbf{s}_t^2) d\bar{V}$$

onde $c_{BS}(\bar{V})$ é a fórmula de B&S, $f(\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade de \bar{V} , e \bar{V} é o valor médio da taxa de variância definido como:

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \mathbf{s}_s^2 ds$$

Isto é, o preço da opção é a esperança condicional em t do preço B&S, utilizando-se o valor da integral acima como parâmetro de volatilidade. Pode-se usar uma aproximação do modelo de H&W que o torna tão prático como o de B&S, utilizando-se como parâmetro de volatilidade na fórmula de B&S a raiz quadrada da média das previsões da volatilidade ao quadrado até $T-t$ passos à frente (Duffie e Pan, 1997).

Considerar a taxa de juros determinística pode não ser tão realista, assim, o ideal seria relaxar esta hipótese e abrir a possibilidade de juros estocásticos. Hull (2000) atesta que, em geral, a taxa de curto prazo é descrita, num modelo neutro ao risco, pelo processo de Itô, da seguinte forma:

$$dR = m(R)dt + s(R)dz$$

Assume-se que o desvio instantâneo $m(R)$ e a tendência $s(R)$ sejam funções de R , mas independentes do tempo. Esse modelo implica que todas as taxas se movem da mesma direção durante qualquer intervalo de tempo, mas não na mesma proporção.

No modelo de Rendleman e Bartter (1980), considera-se que $m(R) = \mathbf{m}R$ e o $s(R) = \mathbf{s}R$, onde \mathbf{m} é a taxa de crescimento esperada e \mathbf{s} a volatilidade da taxa de juros, levando a crer que devido ao comportamento da economia, as taxas de juros tenham tendência de reversão à média em longo prazo.

2.2 Simulação de Monte Carlo

Para as distribuições de probabilidade, nas quais não há os valores da função de distribuição cumulativa de probabilidade em forma analítica ou pelo menos tabulados, necessita-se utilizar os métodos numéricos de integração, para o cálculo do quantil que representa o VaR. Uma das técnicas possíveis é o método de Monte Carlo. A aplicação mais comum do método de Monte Carlo é o cálculo de integrais, embora seja também utilizado para outras finalidades como, por exemplo, a resolução de equações.

Considera-se, primeiramente, a seguinte integral definida:

$$\mathbf{q} = \int_a^b f(x)dx$$

O problema de calcular a integral torna-se um problema de estimativa da média, $E(f(Y))$. Um estimador para a média é dado pela fórmula: $\hat{\mathbf{q}} = (b - a) \frac{\sum f(y_i)}{n}$ onde y_i são valores de uma amostra aleatória de tamanho n retirada da distribuição de probabilidade uniforme sob o intervalo $[a, b]$.

A variância dessa estimativa é dada por:

$$\text{Var}(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{(b-a)^2}{n} \int_a^b \left(f(x) - \int_a^b f(t)dt \right)^2 dx$$

O desvio padrão está diretamente associado ao erro de convergência, e, da equação anterior, conclui-se que a ordem do erro é de $n^{-1/2}$.

Uma importante propriedade do desvio padrão da estimativa pelo método Monte Carlo é a independência com a dimensão da integral. Os erros normalmente são dependentes

da dimensão d : $n^{-\frac{1}{2d}}$ (Gentle, 1998).

O método de Monte Carlo também é bastante utilizado na precificação de opções: simulam-se as trajetórias dos fatores de risco até o prazo de vencimento da opção, aplicam-se esses valores na função que representa o valor da opção e desconta até a data desejada a uma taxa de juros livre de risco.

O preço atual de uma opção de compra européia, considerando as hipóteses de B&S, é o valor esperado da opção numa situação de indiferença ao risco, descontado a uma taxa de juros livre de risco:

$$c_t = e^{-R(T-t)} E[g(S_{T-t})] \quad (2-4)$$

onde $T-t$ é o tempo até o vencimento da opção, S_t é o preço do ativo no tempo t , e $g(\cdot)$ é a função *pay-off* da opção e R é a taxa livre de risco. Por simplificação algébrica, supõe-se que $t=0$.

Num mundo neutro ao risco, $\ln S_T$ possui uma distribuição de probabilidade normal onde o preço da ação num tempo futuro T será dado pela expressão, conforme destacado em Boyle (1977):

$$S_T = S_0 e^{(R-(\sigma^2/2))T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}} \quad (2-5)$$

onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, R é a taxa livre de risco e S_T é o preço do ativo no tempo T .

Aplicando esta última equação na função do valor esperado da opção (Eq. 2.4), tem-se (Joy, Boyle e Tan, 1996):

$$c = e^{-RT} \int_{-\infty}^{\infty} g[S_0 e^{((R-(\sigma^2/2))T + \sigma \varepsilon \sqrt{T})}] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon$$

Através da inversa da função de distribuição de probabilidade da variável normal ε , transforma-se a integral de menos infinito a mais infinito para uma integral com distribuição uniforme sobre o intervalo $[0,1]$:

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon = \int_0^1 h(\Phi^{-1}(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Esta simplificação permite obter uma aproximação eficiente para a integral pela seleção apropriada de amostras de pontos no intervalo $[0,1]$. Pela simulação de Monte Carlo, geram-se n valores de variáveis com distribuição uniforme e o valor da opção será dado por:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i), \text{ onde } \mathbf{x}_i \sim U(0,1)$$

Pode-se optar pela geração de valores de variáveis normais e o valor da opção tornará:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{e}_i), \text{ onde } \mathbf{e}_i \sim N(0,1).$$

Será visto em item posterior que, com os números pseudo-aleatórios, o erro da estimativa acima será da ordem de $n^{-1/2}$, enquanto que, com os números quase-aleatórios será da ordem de $\frac{(\log(n))^d}{n}$.

2.3 Gerando números aleatórios

Pode-se classificar os números aleatórios em três grupos:

- a) Aleatórios. Os números aleatórios são os números puramente aleatórios, que são selecionados por meio não determinístico, que não envolvem algoritmos ou funções, e normalmente são obtidos por intermédio de eventos naturais ou físicos. Nesta classificação, enquadram-se os geradores de números aleatórios (Sobol, 1994).
- b) Pseudo-aleatórios. São os obtidos por meio de algoritmos, de tal forma que apresentem um ciclo de repetição tão alto quanto possível, de modo a simular uma distribuição verdadeiramente randômica. Neste grupo, enquadram-se os métodos de congruência linear abordados por Gentle (1998).
- c) Quase-aleatórios. Conhecidos como seqüências de baixa discrepância, são também obtidos por procedimentos matemáticos.

Desenhando um conjunto de números pseudo-aleatórios em duas dimensões, vê-se que os mesmos não preenchem regularmente os espaços (figura 2.1), verificando-se regiões onde não há pontos, ou seja, os números pseudo-aleatórios não são distribuídos uniformemente no espaço (Paskov e Traub, 1995). Para tornar melhor a estimativa da integração pela sua média (Sobol, 1994), seria conveniente que os números aleatórios pudessem ser distribuídos uniformemente a cada amostra subsequente.

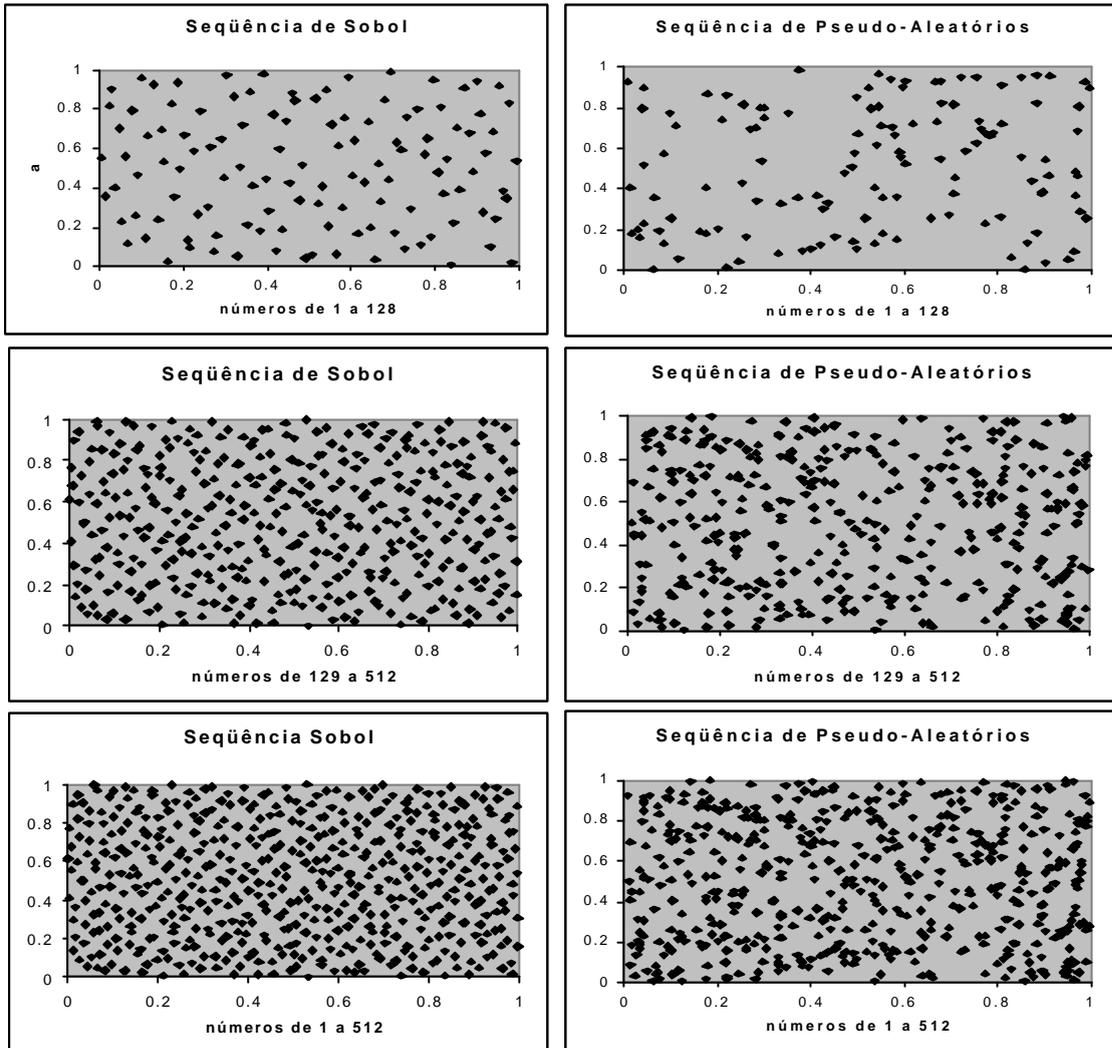


Figura 2.1. Distribuição em 2(duas) dimensões de seqüências de números pseudo-aleatórios gerados pela função *ran2* e de quase-aleatórios gerados pelo algoritmo de Sobol.

Há um conceito em teoria dos números denominado *discrepância*, que mede o desvio da uniformidade de um conjunto de pontos em uma dimensão d . A questão em saber qual conjunto de pontos em uma dimensão d tem a discrepância mais baixa ainda não foi resolvida, porém há várias seqüências de pontos de baixa discrepância conhecidas.

Conforme Papageorgious e Paskov (1999), o erro de aproximação utilizando números determinísticos é o produto da variância, $Var(r_l)$, da função r_l , com a discrepância da amostra D_n , $D_n = C_d \frac{(\log(n))^d}{n}$, onde C_d é uma constante que depende da seqüência de baixa discrepância e d é a dimensão do problema.

Percebe-se que o erro de convergência para pontos de baixa discrepância é proporcional ao inverso da quantidade de números utilizados, sugerindo que este método é superior que o método de Monte Carlo (Paskov, 1994). Esta vantagem diminui com o aumento da dimensão d e alguns pesquisadores relatam que esta vantagem teórica desaparece para $d > 30$ (Paskov e Traub, 1995).

2.4 Critérios de avaliação dos modelos VaR

Os critérios devem identificar a ocorrência de falhas nas previsões, importando para a avaliação os pontos onde a previsão foi inferior à efetivamente ocorrida (caudas da distribuição de retornos). Critérios de avaliação que procurem captar o desempenho da previsão ao longo de toda a curva de distribuição dos retornos não necessariamente serão os melhores do ponto de vista do risco, principalmente quando a abordagem é o VaR.

Os critérios baseados em funções-objetivo avaliam a capacidade do modelo em estimar a curva de distribuição de retornos, contudo, a grande preocupação com o risco é a capacidade de prever exceções, já que o VaR procura capturar os piores cenários. Dessa forma, as caudas da distribuição de probabilidade são mais importantes do ponto de vista do risco e optou-se por avaliar a estimativa do VaR pelo critério de *backtesting*, proposto pelo Comitê de Basiléia, conjugado com o teste de proporção de falhas proposto por Kupiec (1995).

Kupiec desenvolveu um modelo que serve para verificar se o número de vezes em que as perdas efetivas superaram as perdas estimadas pelo VaR pode ser considerado aceitável.

Ele considerou, para vários períodos, intervalos de não rejeição da hipótese nula de que p é a correta probabilidade da proporção (número de falhas dividido pelo total de dias) a um nível de significância de 5%, conforme indicado na tabela abaixo.

P=p* (%)	N=255 dias	N=510 dias	N=1000 dias
1,0	$x < 7$	$1 < x < 11$	$4 < x < 17$
2,5	$2 < x < 12$	$6 < x < 21$	$15 < x < 36$
5,0	$6 < x < 21$	$16 < x < 36$	$37 < x < 65$
7,5	$11 < x < 28$	$27 < x < 51$	$59 < x < 92$
10,0	$16 < x < 36$	$38 < x < 65$	$81 < x < 120$

Tabela 2.1. Intervalos de não-rejeição da hipótese nula H_0 de que a proporção de falhas p^* é igual a p , a 5% de confiança

O número x indica a quantidade de insucessos que poderia se observado numa amostra de tamanho n , sem rejeitar a hipótese nula de que p é a correta probabilidade a um

nível de significância 5%. Kupiec também fornece outra maneira de testar o modelo de VaR, através da quantidade máxima que a amostra utilizada deverá conter para rejeitar a hipótese anterior, ressalta que a técnica de avaliação das estimativas de VaR só será confiável com um grande número de observações.

3. Metodologia

Foram formuladas as seguintes hipóteses a serem testadas:

H1: A simulação de Monte Carlo (SMC) com gerador de números quase-aleatórios apresenta maior convergência que com números pseudo-aleatórios, na estimativa do VaR das ações e das opções da Petrobrás S/A.

H2: O VaR calculado pela simulação Monte Carlo (SMC) e gerador de números quase-aleatórios apresenta-se adequado na previsão da variação de tais ativos.

H3: A simulação de Monte Carlo (SMC) apresenta melhor desempenho na avaliação do VaR do que os métodos paramétricos.

A base de dados empregada neste trabalho é composta pelos preços observados da ação preferencial nominativa da Petrobrás S/A, nos mercados à vista (PETR4), e de contrato de opções de compra da PETR4 (PETRJ39, PETRH5 e PETRH6). Os dados da ação PETR4 foram coletados no período de 4 de julho de 1994 a 18 de agosto de 2000, enquanto foram obtidos os preços das opções de compra de séries negociadas no período de 20 de abril de 1998 a 18 de agosto de 2000. Utilizam-se as cotações diárias de fechamento da ação e da opção de compra como realização do processo estocástico dos preços (Taylor, 1986).

Para a análise proposta por este trabalho, utilizou-se uma carteira linear hipotética composta de uma ação PETR4 e uma carteira não-linear hipotética composta por uma opção de compra da PETR4.

O retorno foi calculado pela forma logarítmica, que é dado por:

$$r_t = \ln\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right)$$

onde: F_t é o valor do fator de risco no instante t.

Para o cálculo do prêmio da opção utilizaram-se os modelos de B&S, H&W e o modelo de H&W associado com o modelo de Rendleman e Barter (1980), que considera a taxa de juros como variável estocástica, para a avaliação dos prêmios de contratos de opção. E, para representar a taxa de retorno do ativo livre de risco, utilizou-se a taxa de juros SELIC, que reflete o custo médio das operações com títulos públicos federais.

A carteira hipotética é composta de opções de compra da ação PETR4, no entanto a posição pode ser comprada ou vendida, e, a depender desta, a avaliação do desempenho dos métodos em prever a pior perda na carteira será diferente. É conveniente, então, analisar as duas situações.

3.1 VaR - Simulação de Monte Carlo

Para a carteira linear, formada apenas com ações à vista, basta simular os valores da ação utilizando trajetórias de preço. Como foi visto, num mundo neutro ao risco, $\ln S_T$ possui a seguinte distribuição de probabilidade, e pela equação 2.5 pode-se escrever uma fórmula recursiva, discretizada no intervalo Δt , para o preço da ação da seguinte forma:

$$S_t = S_{t-1} e^{(R - (s^2/2))\Delta t + s\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \quad (3-6)$$

onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, R é a taxa livre de risco e S_t é o preço do ativo na etapa t .

Para a carteira de opções, no modelo de B&S, simulam-se as trajetórias de preço da ação para o momento de tempo desejado, e aplica-se a fórmula de precificação para obter uma distribuição empírica do valor da opção. O VaR então é medido diretamente pelo quantil da significância desejada.

No modelo H&W, simulam-se as trajetórias de preço e de volatilidade implícita, e aplica-se o modelo de precificação para obter o valor esperado da opção para o momento em que se estar estimando a perda da carteira. No terceiro modelo analisado, além dessas duas trajetórias, também simula o processo estocástico da taxa de juros pelo modelo de Rendleman e Barter (1980).

Quando há mais de um fator de risco, ter-se-á a seguinte expressão:

$$X_t^j = X_{t-1}^j e^{(R - (s_j^2/2))\Delta t + s_j \varepsilon_j \sqrt{\Delta t}}$$

onde X_t^j são os valores no instante t dos fatores de risco j , sejam preço da ação, volatilidade ou taxa de juros, e ε são variáveis aleatórias independentes entre períodos de tempo e entre as séries j .

Entretanto, os fatores de risco são geralmente correlacionados, e, para modelar essa correlação, utiliza-se a fatoração de Cholesky para as variáveis aleatórias.

O componente essencial de um gerador de números pseudo-aleatórios é uma distribuição uniforme sobre o intervalo $[0,1]$, que produz uma variável aleatória x . A partir de

uma distribuição uniforme, pode-se transformar esta em diversas distribuições desejadas. No caso de integração de funções, que corresponde ao procedimento de inversão da função de distribuição para estimar o quantil, utilizam-se distribuições uniformes. Para simular as trajetórias de preços dos fatores de risco, partindo da suposição de que seguem o movimento *browniano* geométrico, precisa-se de uma distribuição normal padronizada.

Existem vários métodos para transformar uma distribuição uniforme em normal padrão. Um dos mais utilizados é o método de Box Miller (Press *et al.*, 1992), no entanto apresenta perda de eficiência em seqüências quase-aleatórias (Galanti e Jung, 1997) que será de fundamental importância para este trabalho, como será visto logo a seguir. Utilizar-se-á o método proposto por Moro (1995). Este método transforma o número aleatório com distribuição uniforme na distribuição desejada, através da inversa da função de distribuição de probabilidade cumulativa.

Como geradores de números aleatórios, utiliza-se a função *ran2* (Press *et al.*, 1992), que é baseado no método de congruência linear, e, como gerador de números quase-aleatórios, utiliza-se a seqüência de Sobol (Press *et al.*, 1992), implementados em Fortran.

Estes algoritmos fornecem variáveis uniformes e para proceder a transformação em variável aleatória normal, utiliza-se o algoritmo de Moro (1995).

As variações de valor para contratos lineares podem ser totalmente explicadas pelos termos de primeira ordem da expansão da série de Taylor, já que os de maiores são nulos. Para a carteira hipotética composta da ação PETR4, assumiu-se que o retorno seguirá uma distribuição normal, de modo a utilizar a seguinte fórmula do VaR apresentada no referencial teórico, a que denomina-se de método paramétrico do desvio padrão:

$VaR = VC_0 \cdot \alpha \sigma$, onde α é desvio normalizado para a significância selecionada, σ é o desvio padrão ou volatilidade do preço da ação e VC_0 é o valor de mercado da carteira. Utiliza-se o desvio padrão amostral em janelas móveis de tamanho de 100 dias como estimador da volatilidade do preço.

Para derivar uma expressão analítica do VaR para a carteira não-linear composta de opção de compra, recorre-se ao modelo de precificação de Black&Scholes (equação 2.3), que relaciona o valor de uma opção a vários fatores de risco:

$$c = g(S, \mathbf{s}, R, t) = S \cdot N(d) - K \cdot e^{-Rt} \cdot N(d - \mathbf{s} \sqrt{T-t})$$

Utilizando os primeiros termos da expansão de Taylor para esta função $g(\cdot)$, a variação no valor da opção pode ser escrita da seguinte forma:

$$dc = \frac{\partial g}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} d\mathbf{S} + \frac{\partial g}{\partial r} dr + \frac{\partial g}{\partial t} dt$$

É comum definir as derivadas parciais da função $g(\cdot)$ do valor da opção pelas seguintes letras gregas:

Delta da opção: $\Delta = \frac{\partial g}{\partial S} = N(d)$

Gama da opção: $\Gamma = \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} = \frac{\Phi(d)}{S\mathbf{S}\sqrt{T-t}}$

Vega da opção: $\Lambda = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} = S\sqrt{T-t}\Phi(d)$

Rô da opção: $\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial r} = Ke^{-R(T-t)}(T-t)n(d - \mathbf{S}\sqrt{T-t})$

O grande fator de risco da opção é sem dúvida o preço da ação. É por isso que normalmente se usa a aproximação linear do Delta para a análise do risco da opção. A grande vantagem da aproximação Delta é a adição, ou seja, se temos uma carteira com várias opções, o risco pode ser analisado como a soma das posições Delta de cada opção.

Considerando só o Delta, a variação do valor do prêmio da opção, dc , será:

$$dc = \Delta dS \quad \text{e portanto:} \quad \text{Var}(dc) = \Delta^2 \text{Var}(dS)$$

Considerando σ a volatilidade das variações do preço da ação, $\sigma(dS/S)$, e recorrendo a equação do processo de Itô, $dS = \mathbf{m}Sdt + \mathbf{S}Sdz$, tem-se que :

$$\text{Var}(dS) = \mathbf{S}S$$

Supondo agora que a distribuição dessa variação é normal, pode-se aplicar a fórmula do VaR dada pela equação 2.1. Então, o VaR da variação do valor da opção será:

$$\text{VaR}(dc) = -\mathbf{a}\Delta\mathbf{S}\mathbf{S}$$

Considerando que a variação do prêmio da opção está inserida nas gregas Delta e Gama, da série de Taylor, a variação do prêmio da opção será: $dc = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2$

Se a variável dS for normalmente distribuída, obtém-se:

$$\text{Var}(dc) = \Delta^2 \text{Var}(dS) + \frac{1}{2}(\Gamma \text{Var}(dS))^2$$

Considerando σ a volatilidade das variações do preço da ação, $\sigma(dS/S)$, o VaR da opção será:

$$VaR(dc) = -a \sqrt{\Delta^2 S^2 \mathbf{s}^2 + \frac{1}{2} (\Gamma S^2 \mathbf{s}^2)^2}$$

A composição Delta-Gama fornece uma aproximação muito melhor para as variações na opção, entretanto sempre se estará incorrendo em erro, devido ao fato de os termos de ordens maiores que o Gama estarem sendo desprezados.

Utiliza-se a volatilidade implícita como estimador para a volatilidade do ativo-objeto quando da aplicação dos modelos de precificação de opções.

No cálculo do VaR, é necessário definir arbitrariamente um nível de significância e um período de tempo. Utilizou-se um intervalo de confiança de 99% no cálculo do VaR para a carteira linear de ações da Petrobrás. Já no caso da carteira de opções, como as séries de opções não são muito negociadas, utilizou-se o intervalo de 95%.

4. Resultados Empíricos

Compara-se inicialmente a eficiência dos números quase-aleatórios e pseudoaleatórios, no cálculo do VaR utilizando a simulação de Monte Carlo para carteiras lineares e não-lineares. A carteira linear hipotética utilizada para a análise é composta de 1 (uma) ação preferencial da Petrobrás S/A – PETR4. Utilizando a equação 3-6, implementam-se diversas trajetórias de preço da ação para o dia seguinte, a partir da simulação de uma distribuição normal da variável ε . Com a distribuição dos preços, determina-se a distribuição da perda da carteira, de onde retira-se, pela significância desejada, o VaR do quantil amostral correspondente. Utilizando as informações até o dia 30/04/1998, procede-se ao cálculo do VaR para o dia seguinte, 01/05/1998, com significância de 99%. Considera-se o valor verdadeiro do VaR, o obtido com simulação de Monte Carlo com 50.000 pontos (valor exato = -0.0895). A convergência do procedimento numérico é verificada pelo gráfico do erro relativo percentual *versus* número de simulações, constante na figura 4.1.

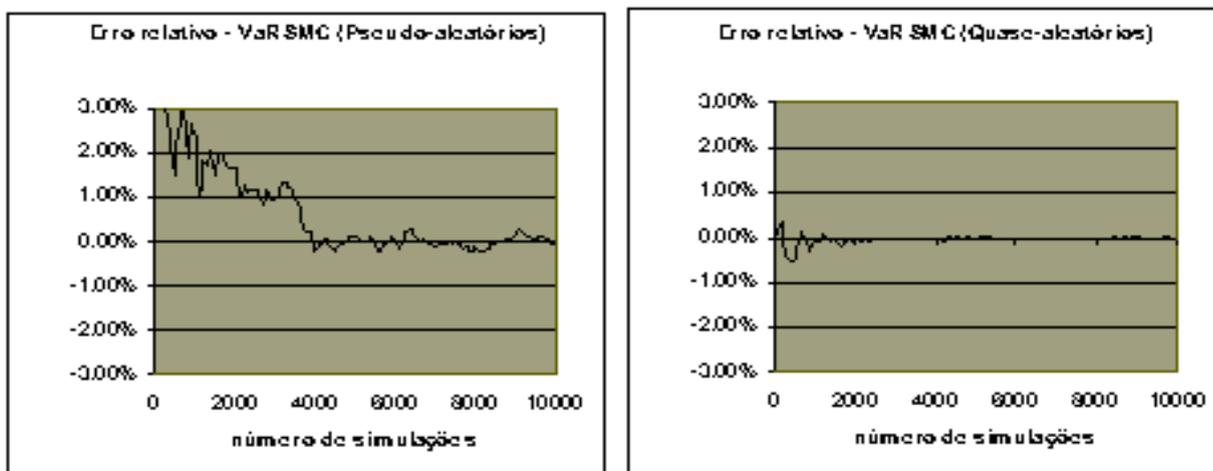


Figura 4.2. Erro relativo percentual do VaR da ação PETR4 calculado pela SMC com números pseudo-aleatórios e quase-aleatórios

Pode-se também comparar estes métodos utilizando-se do critério referenciado por Papageorgiou e Traub (1996), verificando-se para um mesmo nível de erro relativo percentual (ER), $10E-4$ por exemplo, quantos pontos são necessários para atingir tal erro pela utilização dos dois tipos de geradores de aleatórios. A velocidade relativa, calculada pela razão entre a quantidade de números utilizados para o mesmo nível de precisão, também serve de parâmetro para verificar a taxa de convergência relativa entre os geradores.

Método	Erro relativo (ER= $10E-4$)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	4100	0.15
SMC quase-aleatórios	600	6.83

Tabela 4.1. Erro relativo percentual e velocidade relativa da estimativa do VaR através da SMC com números pseudo-aleatórios e quase-aleatórios.

Constata-se pela tabela 4.1 que a velocidade relativa da SMC com números quase-aleatórios é bem superior a da SMC com números pseudo-aleatórios. Isto representa, além da eficiência numérica, um tempo computacional muito menor e, por conseguinte, um custo também menor.

Verifica-se, em seguida, a performance da simulação de Monte Carlo e Quase Monte Carlo no cálculo do VaR de uma carteira composta de opção de compra da Petrobrás S/A, que representa neste trabalho uma carteira não-linear. A PETRJ39 é uma opção de compra da ação PETR4 com vencimento em 10 de outubro de 2000 e com preço de exercício de R\$ 50,00, para o lote de 100 (cem) ações.

Utiliza-se, para o cálculo da volatilidade da série da ação objeto da opção, o estimador de máxima verossimilhança com mínima variância, utilizando como base histórica os últimos 100 dias de negociação da ação PETR4. O valor verdadeiro para o VaR da carteira de opção foi considerado o valor obtido com simulação de 100.000 números.

Considera-se, inicialmente, como variável estocástica, apenas o preço do ativo-objeto (SMC Univariada), obedecendo a movimento definido como um processo de Itô, enquanto que os demais parâmetros necessários para o cálculo do prêmio são considerados constantes. Este é o modelo original de Black & Scholes.

Para comparação da performance da geração dos números aleatórios, calcula-se o VaR para o dia 01/08/2000, utilizando o modelo acima e combinando seqüências de Sobol e de números pseudo-aleatórios. Pela figura 4.3, se observam que os números quase-aleatório fazem com que a estimativa do VaR tenha convergência mais rápida para o valor verdadeiro. Com menos de 20000 simulações, já foi possível atingir o valor verdadeiro, e permanecer em torno deste valor com erros relativos inferiores a $10E-4$.

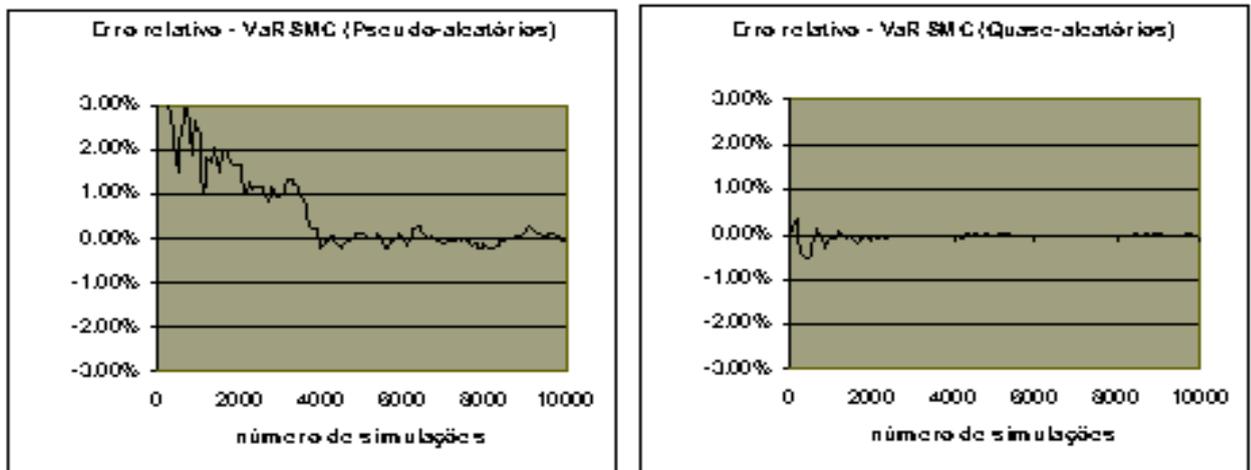


Figura 4.3. Convergência do VaR da carteira de opções de compra PETRJ39 utilizando simulação de Monte Carlo (Univariada)

Na tabela 4.2, comparam-se os métodos, utilizando o critério da velocidade relativa referenciado no item anterior. Observa-se que a velocidade relativa é quase cinco vezes maior para a seqüência de números quase-aleatórios. Esta velocidade diminuiu um pouco em relação à velocidade relativa obtida para a carteira linear.

Método	Erro relativo (ER=10E-4)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	4100	0.15
SMC quase-aleatórios	600	6.83

Tabela 4.2. Erro relativo percentual (ER) e velocidade relativa do VaR da opção de compra PETRJ39 utilizando simulações de Monte Carlo (Univariada)

Supõe-se, em seguida, que o ativo-objeto e a volatilidade implícita seguem um processo estocástico (SMC Bivariada). Utiliza-se a aproximação do modelo de H&W para precificar a opção e calcular o seu valor no horizonte de um dia a frente, de modo a estimar o VaR.

Na tabela 4.3, apresentam-se os valores dos erros relativos percentuais, considerando o valor exato para a estimativa o calculado com 100.000 simulações. Verifica-se que a estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo (SMC Bivariada) com gerador de números quase-aleatórios converge a uma velocidade relativa de quatro vezes em comparação com o de números pseudo-aleatórios. Percebe-se que esta vantagem diminui em relação à SMC Univariada onde se considerou apenas o preço da ação como uma variável estocástica.

Método	Erro relativo (ER=10E-4)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	60000	0.25
SMC quase-aleatórios	15000	4.00

Tabela 4.3. Erro relativo percentual e velocidade relativa do VaR da opção PETRJ39 calculado com SMC Bivariado

Considera-se, agora, que as três variáveis; o preço da ação, a volatilidade da ação e a taxa de juros, são estocásticas e acima seguem um processo de Itô. O modelo dos juros é admitido como sendo o modelo de Rendleman e Bartter (1980). Na tabela 4.5, apresentam-se os valores dos erros relativos, considerando o valor exato para a estimativa o calculado com 100000 simulações. Observa-se novamente que a seqüência de números quase-aleatórios foi mais eficiente, considerando-se que atingiu um erro relativo com uma quantidade menor de simulação. No entanto, quando comparado com a SMC Bivariada, percebe-se que a velocidade relativa diminuiu mais um pouco.

Métodos	Erro relativo (ER=10E-4)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	52000	0.31
SMC quase-aleatórios	16000	3.25

Tabela 4.4. Erro relativo percentual e velocidade relativa do VaR da opção PETRJ39 com SMC Trivariada

Depreende-se da análise que, independentemente do gerador de aleatórios utilizado, a convergência do procedimento numérico de cálculo do VaR é maior quando se trata de carteira lineares. A velocidade relativa da estimativa, utilizando-se seqüências de quase-aleatórios, apresentou-se em todos os momentos mais eficientes.

Ademais, percebe-se que, à medida que se incluiu uma dimensão no procedimento numérico, com a inclusão sucessiva de variáveis estocásticas, a performance relativa dos quase-aleatórios diminui, embora a vantagem em relação aos pseudo-aleatórios continue grande. Este resultado está coerente com a análise das fórmulas do erro de estimativa utilizando números pseudo-aleatórios, obtido na seção 2.4, que é da ordem de $n^{-1/2}$, e do erro da estimativa utilizando números quase-aleatórios, que é da ordem de $\frac{(\log(n))^d}{n}$. Esses resultados também estão coerentes com os obtidos por Paskov e Traub (1995), Joy, Boyle e Tan (1996), Papageorgiou e Traub (1996) e Galanti e Jung (1997).

Em síntese, pode-se concluir que a simulação de Monte Carlo (SMC) com gerador de números quase-aleatórios apresenta maior convergência que com números pseudo-aleatórios, na estimativa do VaR de uma carteira de ações e de uma carteira de opções da Petrobrás (Hipótese 1 – não rejeitada).

Utilizando agora apenas as seqüências de números quase-aleatórios, verifica-se a capacidade dos modelos de SMC e paramétrico, para uma carteira linear e outra não-linear, em prever a variação na carteira para um dia de horizonte de tempo.

Calcula-se o VaR da ação PETR4 para o horizonte de 1 (um) dia e a 99% de confiança, para os 510 dias compreendidos entre 01/01/1998 e 15/12/1999. Os 100 (cem) dias anteriores a 01/01/1998 foram utilizados para calcular os parâmetros volatilidade e média, a serem aplicados nos modelos.

O VaR paramétrico em mais de 9 (nove) dias foi superado pelo retorno efetivo, enquanto que o VaR pela SMC só foi excedido em 2 (dois) momentos. Resta saber se as falhas ocorridas para os métodos estão dentro da incerteza oriunda da variação amostral. Para tanto utiliza-se a tabela 2.1, construída por Kupiec (1995).

Método	Posição	Número de falhas	Proporção de falhas
VaR paramétrico	comprada	10	1.96%
	vendida	12	2.35%
VaR SMC	comprada	2	0.39%
	vendida	2	0.39%

Tabela 4.5. Teste de rejeição da hipótese de que a proporção de falhas é de 1%

Para um nível de confiança de 95%, a máxima quantidade de falhas permitida para não rejeitar a hipótese de que a proporção das mesmas é igual ao nível de confiança do VaR, ou seja 99%, é de 11 ocorrências, conforme Kupiec (tabela 2.1). Rejeita-se, portanto, apenas o VaR paramétrico da carteira com posição vendida. Verifica-se que, embora, para a carteira com posição comprada, não tenham sido rejeitados os dois métodos, é significativa a diferença da quantidade de erros para cada método, apresentando o método de SMC menos erros.

Para verificar a capacidade das estimativas de VaR dos métodos propostos para carteiras não-lineares, utiliza-se uma carteira hipotética composta de opções de compra PETRH5 e PETRH6, pois as mesmas apresentam o maior intervalo de negociação para o período analisado, de modo a ter maior consistência para o teste de proporção das falhas.

Realizou-se o cálculo do VaR para todo o período de negociação da opção PETRH6 utilizando a simulação de Monte Carlo com inúmeros quase-aleatórios e também pelas aproximações Delta e Delta-Gama. Os resultados encontram-se na tabela 4.6.

Data	Variação no prêmio	SMC Uni	SMC Bi	SMC Tri	Delta	Delta-Gama
15-Jun-00	0.000	-0.600	-0.334	-0.336	0.000	0.000
16-Jun-00	0.370	-0.591	-0.512	-0.512	0.000	0.000
19-Jun-00	1.498	-0.713	-0.550	-0.548	0.000	0.000
20-Jun-00	-0.499	-0.855	-0.775	-0.776	0.000	0.000
21-Jun-00	0.300	-0.838	-0.988	-0.988	0.000	0.000
23-Jun-00	0.000	-0.894	-1.002	-1.003	0.000	-0.006
26-Jun-00	0.000	-0.889	-1.024	-1.027	-0.018	-0.003
27-Jun-00	1.000	-0.887	-1.019	-1.019	-0.053	-0.004
28-Jun-00	0.400	-1.048	-1.086	-1.086	-0.012	-1.451
29-Jun-00	-1.200	-1.165	-1.143	-1.139	-0.052	-2.272
30-Jun-00	0.290	-1.004	-1.145	-1.145	-0.054	-1.321
03-Jul-00	0.410	-1.145	-1.174	-1.176	-0.062	-2.253
04-Jul-00	1.200	-1.300	-1.274	-1.274	-0.060	-2.394
05-Jul-00	-0.400	-1.477	-1.396	-1.394	0.000	-2.461
06-Jul-00	-0.300	-1.294	-1.241	-1.245	-0.033	-2.409
07-Jul-00	-1.290	-1.295	-1.268	-1.270	-0.004	-2.411
10-Jul-00	-0.110	-1.024	-1.077	-1.077	0.000	-1.879
11-Jul-00	-1.550	-1.015	-1.061	-1.063	0.000	-2.082
12-Jul-00	-0.450	-0.637	-0.784	-0.783	0.000	0.000
13-Jul-00	-0.390	-0.536	-0.670	-0.670	0.000	0.000
14-Jul-00	0.090	-0.396	-0.521	-0.520	0.000	0.000
17-Jul-00	0.100	-0.471	-0.558	-0.558	0.000	0.000
18-Jul-00	-0.100	-0.468	-0.577	-0.577	0.000	0.000
19-Jul-00	-0.100	-0.435	-0.538	-0.538	0.000	0.000
20-Jul-00	0.400	-0.421	-0.502	-0.501	0.000	0.000
21-Jul-00	0.150	-0.638	-0.655	-0.656	0.000	0.000
24-Jul-00	-0.400	-0.654	-0.674	-0.676	0.000	0.000
25-Jul-00	-0.250	-0.501	-0.536	-0.538	0.000	0.000
26-Jul-00	0.100	-0.367	-0.421	-0.422	0.000	0.000
27-Jul-00	-0.240	-0.412	-0.462	-0.463	0.000	0.000
28-Jul-00	-0.260	-0.320	-0.367	-0.368	0.000	0.000
31-Jul-00	-0.050	-0.208	-0.248	-0.248	0.000	0.000
01-Ago-00	-0.200	-0.191	-0.224	-0.223	0.000	0.000
02-Ago-00	0.000	-0.091	-0.112	-0.111	0.000	0.000
03-Ago-00	0.030	-0.097	-0.112	-0.112	0.000	0.000
04-Ago-00	0.010	-0.113	-0.130	-0.130	0.000	0.000
07-Ago-00	0.110	-0.112	-0.132	-0.132	0.000	0.000
08-Ago-00	-0.160	-0.173	-0.194	-0.194	0.000	0.000
09-Ago-00	0.000	-0.087	-0.101	-0.101	0.000	0.000
10-Ago-00	0.060	-0.084	-0.100	-0.100	0.000	0.000
11-Ago-00	0.050	-0.149	-0.137	-0.137	0.000	0.000
14-Ago-00	-0.040	-0.182	-0.167	-0.167	0.000	0.000
15-Ago-00	0.040	-0.156	-0.144	-0.145	0.000	0.000
16-Ago-00	-0.060	-0.188	-0.172	-0.172	0.000	0.000
17-Ago-00	0.160	-0.161	-0.150	-0.150	0.000	0.000
18-Ago-00	-0.330	-0.307	-0.289	-0.289	0.000	0.000

Tabela 4.6. Estimativas do VaR da opção PETRH6 pela simulação de Monte Carlo (SMC) em 3 variantes e para os métodos paramétricos Delta e Delta-Gama

Aplicando o procedimento de *backtesting*, calcula-se a proporção de falhas dos métodos na previsão da perda da carteira. Os resultados são mostrados na Tabela 4.7.

Método	Posição	Número de falhas	Proporção de falhas (p)	Hipótese nula: p=0.05
SMC Uni	comprada	4	8.70%	não rejeita
	vendida	2	4.35%	não rejeita
SMC Bi	comprada	4	8.70%	não rejeita
	vendida	2	4.35%	não rejeita
SMC Tri	comprada	4	8.70%	não rejeita
	vendida	2	4.35%	não rejeita
Delta	comprada	23	50.00%	rejeita
	vendida	22	47.83%	rejeita
Delta-Gama	comprada	17	36.96%	rejeita
	vendida	19	41.30%	rejeita

Tabela 4.7. Teste de Hipótese de que a proporção de falhas do VaR é 0.05 a 95% de confiança

A proporção de falhas pelos métodos paramétricos foi rejeitada a 95% de confiança, enquanto os 3 (três) modelos de SMC não foram rejeitados. A performance dos 3 (três) tipos de simulação de Monte Carlo foi exatamente a mesma. Concluí-se, portanto, que a inclusão de variáveis estocásticas, quase sejam, a volatilidade implícita e juros, não agregou ao modelo capacidade de prever a variação da carteira.

Replicou-se o mesmo procedimento para a opção PETRH5, obtendo-se resultados similares: também os métodos paramétricos foram reprovados.

Em síntese, pode-se concluir que o VaR calculado pela simulação Monte Carlo (SMC) e gerador de números quase-aleatórios apresenta-se adequado na previsão da variação das carteiras de ações PETR4 e de opções da Petrobrás, PETRH5 e PETRH6 (Hipótese 2 – não rejeitada), bem como apresenta melhor desempenho que os métodos paramétricos (Hipótese 3 – não rejeitada). Portanto, as três hipóteses formuladas não foram rejeitadas.

5. Conclusões

A estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo para a ação PETR4 foi considerada adequada para previsão da perda da carteira, ao nível de confiança de 99%, utilizando-se o teste de proporção de falhas proposto por Kupiec (1995). Ademais, este método teve performance melhor que o método paramétrico do desvio padrão.

O VaR calculado pela simulação de Monte Carlo, utilizando os três modelos de precificação, o Black&Scholes (SMC Univariada), o de Hull&White que inclui volatilidade estocástica (SMC Bivariada) e, por último, a inclusão da taxa de juros também estocástica através do modelo de Rendleman e Bartter (SMC Trivariada), apresentou-se adequado na avaliação da perda do valor das opções. Nas séries analisadas, não se rejeitou a hipótese de

que a estimativa de VaR é suficiente para prever as piores realizações da carteira de opções, dentro de um nível de confiança desejado de 95%. A SMC teve performance melhor do que os modelos paramétricos de aproximação pela expansão de Taylor, Delta e Delta-Gama. Na realidade, as estimativas do VaR pelos métodos Delta e Delta-Gama foram inclusive rejeitadas pelo teste de Kupiec (1995).

As estimativas do VaR pelos modelos de Black & Scholes (SMC Univariado), Hull & White (SMC Bivariada) e o do Hull & White com juros estocásticos (SMC Trivariada) foram compatíveis. Não houve melhorias significativas na estimativa de VaR pelo modelo de B&S com a inclusão da volatilidade implícita como variável estocástica (SMC Bivariado). A estimativa do VaR considerando-se, além do preço e da volatilidade, a taxa de juros como variável estocástica, também não apresentou diferenças significativas com relação àquelas obtidas pelos modelos de Black & Scholes e de Hull & White.

Referências Bibliográficas

- BOYLE, P. P. Options: a monte carlo approach. *Journal of Financial Economics*, n. 4, p. 323-338, 1977.
- DUFFIE, D.; PAN, J. An overview of value at risk. *Journal of derivatives*, v. 4. n. 3, p. 7-49, spring 1997.
- GALANTI, S.; JUNG, A. Low-discrepancy sequences: Monte Carlo simulation of options prices. *The Journal of Derivatives*, p. 63- 83, fall 1997.
- GENTLE, J. E. *Random number generation and Monte Carlo methods*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- HULL, J. C. e WHITE, A. *Options, futures & others derivatives*, 4^a ed., Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000.
- JOY, C., BOYLE, P. P. e TAN. K. S. Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance. *Management Science*, v. 42, n. 6, p. 926-936, jun. 1996.
- JORION, P. *Value at risk: the new benchmarking for managing financial risk*. 2^a ed., New York: McGraw-Hill, 2000.
- KUPIEC, P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurements models. *Journal of Derivatives*, v. 2, p. 73-84, dez. 1995.
- MORO, B. The full monte. *Risk*, v. 8, n. 2, p. 57-58, fev. 1995.
- PAPAGEORGIOU, A.; TRAUB, J.T. Beating Monte Carlo. *Risk*, v.9, n.6, p. 63-65, jun. 1996.
- REAd – Edição 28 Vol. 8 No. 4, jul-ago 2002

PASKOV, S. H.; TRAUB, J. F. Faster valuation of financial derivatives. *The Journal of Portfolio Management*, p. 113-120, fall 1995;

PRESS, W. H., et. al. *The art of scientific computing*, 2^a ed., Cambridge - EUA: Cambridge University Press, 1996.

RENDLEMAN, R.; BARTTER, B. The pricing of options on debt securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, n. 15, p. 11-24, mar. 1980.

SOBOL, I. M. *A primer for the Monte Carlo Method*. USA: CRC Press LLC, 1994.