INVESTIGANDO A PRESENÇA DO CAOS NO IBOVESPA

Paulo Sergio Ceretta [1]
Rua Francisco Manoel 360 Bloco B apto 403 - Bairro Centro
CEP: 97015-260 Santa Maria/RS Brasil
E-mail: ceretta@smail.ufsm.br

[1]Universidade Federal de Santa Maria - UFSM
Programa de Pós-Graduação em Administração - CCSH
CEP: 97119-900 Santa Maria/RS Brasil

Resumo:

Recentemente o interesse da dinâmica não-linear, especialmente a dinâmica não-linear caótica determinista, aumentou tanto na literatura das ciências físicas quanto na ciência financeira. Em finanças esse fato ocorre porque a freqüência dos choques e de grandes movimentos nos mercados de ações está além do que seria esperado sob a hipótese da distribuição normal. O objetivo deste estudo é investigar a presença de comportamento caótico determinista no índice de mercado da BOVESPA utilizando o teste *close returns*. O estudo utiliza a série de retornos diários do índice em moeda local, moeda corrente local ajustada à inflação e em dólar no período de 1994 até 2001. Os resultados obtidos indicam a existência de uma fraca dependência não-linear complexa, porém, não é consistente com um processo de geração não-linear caótico.

Palavras-Chave: Mercado de ações, caos, dinâmica não-linear, *close returns*, complexidade.

INVESTIGANDO A PRESENÇA DO CAOS NO IBOVESPA

INTRODUÇÃO

Recentemente, a literatura de Finanças tem sido agraciada com um farto material bibliográfico direcionado à investigação do modelo *random walk* em mercados de ações de diversos países. Estudo pioneiro sobre *random walk*, ou simplesmente caminho aleatório, foi desenvolvido pelo matemático Bachelier (1900) numa investigação sobre correlação linear nos preços de ativos financeiros, no qual concluiu que havia idêntica probabilidade da variação dos preços serem positivas ou negativas. Embora nunca tenha sido esgotado, após a publicação do estudo de Lo e MacKinlay (1988), o tema ganhou um grande impulso, principalmente em países emergentes.

Por outro lado, é crescente o interesse pela investigação da dependência não-linear nas variações de preço, notadamente, influenciado pelo avanço da teoria do caos nas ciências físicas. Testes estatísticos lineares não têm nenhum poder frente a processos caóticos, pois caos é um fenômeno não-linear complexo que lhe atribui características de imprevisibilidade a longo prazo. No mercado de ações, sob a hipótese de caos, a existência de forte dependência não-linear às taxas de retorno passadas não implica na possibilidade de se estruturar estratégias de negociação com lucros anormais. Embora a dinâmica da não-linearidade não seja exatamente um assunto novo, sua aplicação no mercado financeiro é incipiente.

Grande parte das dificuldades e resistências ao uso de modelos não-lineares é exatamente devido ao grau de complexidade dos cálculos exigido. Porém, com o grande avanço da tecnologia de informática e da cooperação de pesquisadores da área das ciências físicas, essa dificuldade começa a ser superada. Uma das implicações da presença do caos no mercado financeiro é que seria possível justificar certas anomalias que atormentam a Hipótese de Mercados Eficientes (efeitos mês do ano, dia da semana, feriado, capitalização de mercado, etc). Essas anomalias são vistas como padrões regulares que, sob a Hipótese de Mercados Eficientes, não deveriam existir, mas, por outro lado, não possibilitam que seus conhecedores vençam constantemente o mercado.

O objetivo desta pesquisa é investigar possíveis evidências de comportamento caótico no mercado de ações, através da análise das variações diárias do Ibovespa no período entre 29/12/1994 e 27/06/2001. O estudo está estruturado em sete seções. A primeira consiste nesta breve introdução; na segunda seção, é apresentada a definição conceitual de caos; na terceira seção, uma breve evolução histórica sobre a origem da dinâmica não-linear complexa; na quarta seção, é descrito o teste utilizado para detectar comportamento caótico; na quinta seção

são discutidos alguns aspectos metodológicos; na sexta seção, são apresentados os resultados empíricos e, na sétima seção, é realizada a conclusão do estudo.

DEFINIÇÃO DE CAOS

A teoria do caos é uma disciplina científica em desenvolvimento, cujas fronteiras não estão bem definidas, focalizada no estudo dos sistemas não-lineares complexos. Portanto, o entendimento do caos está intrinsicamente relacionado com os conceitos de três termos básicos: sistemas, não-linearidade e complexidade.

O termo sistema é uma relação de interdependência e inter-relacionamento entre partes. Um exemplo clássico, apresentado por Ruelle (1991), é uma pilha de pedras. A inter-relação e a interdependência é vista com mais facilidade quando se retira uma pedra da base, provocando um desmoronamento da pilha. O desmoronamento nada mais é do que uma reorganização na busca de um novo estado de equilíbrio. Naturalmente, o sistema é dinâmico, ou seja, a cada nova alteração na base, a pilha de pedra se reorganizará, procurando manter-se em equilíbrio.

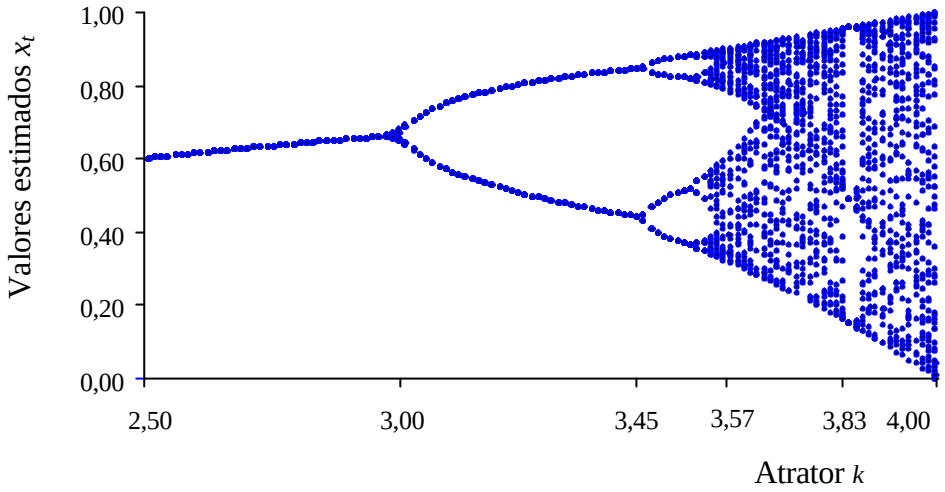
O segundo termo, não-linearidade, está relacionado à estrutura matemática utilizada para representar o comportamento do sistema real. Um modelo linear constitui-se na tentativa de estabelecer uma relação de proporcionalidade constante entre variáveis, ou seja, a mudança em uma variável causará uma alteração proporcional em outra variável e essa alteração pode ser representada por uma linha reta. Por outro lado, a não-linearidade significa ausência de proporcionalidade constante. Desse modo, a mudança em uma variável deverá produzir alterações não proporcionais em outra variável. No modelo não-linear, a melhor maneira de se identificar o relacionamento entre variáveis não é uma linha reta, mas sim, opções curvilíneas.

O terceiro termo, complexidade, está relacionado com a dificuldade de se estruturar um modelo para predizer o comportamento de um sistema real. Por exemplo, é pouco complexo predizer o tempo necessário para se deslocar da cidade (A) para a cidade (B); salvo a interferência maligna do destino, o tempo necessário é dado pela razão entre a distância e a velocidade de deslocamento ($t = d/v$). Observa-se que uma parada para abastecimento ou uma possível troca de pneu, pode ser administrada e não causará uma grande distorção entre o resultado estimado e o resultado real.

Por outro lado, conforme o exemplo de Ruelle (1991), nada simples é a tentativa de predizer o comportamento de uma pilha de pedras desmoronando. Nesse caso, será necessário obter informações detalhadas sobre a forma de cada pedra, seus pesos, medidas, locais em que estão inseridas na pilha, a interdependência e a inter-relação que cada pedra sofrerá e exercerá sobre as demais devido aos atritos. Mesmo assim, se for desprezado um simples grão de pedra

por mais pequeno que seja, o resultado da predição será muito diferente do sistema real. Grande dependência a condições iniciais é uma das características dos sistemas complexos.

Segundo Baumol e Benhabib (1989), caos pode ser entendido como um fenômeno onde mecanismos dinâmicos, simples e determinísticos produzem efeitos ao longo do tempo tão



complicados que o tornarão imune frente à maioria dos testes de previsibilidade. Stewart (1990) definiu caos como um comportamento aparentemente estocástico que ocorre num sistema determinístico. Segundo essas descrições, muitas séries temporais de dados, inicialmente considerados de comportamento aleatório, podem apresentar padrões determinísticos. Um dos aspectos fundamentais do caos é a hiper-sensibilidade a condições iniciais, ou seja, o resultado da previsão para um sistema é muito sensível ao estado inicial desse sistema.

A Figura 1 ilustra a dinâmica que ocorre com valores estimados devido a pequenas alterações no valor de um parâmetro da equação logística $x_t = kx_{t-1}(1-x_{t-1})$. Para cada um dos valores do parâmetro $2{,}50 \leq k \leq 4{,}00$, foram realizadas 50 interações que foram distribuídas sobre o eixo vertical. Observa-se que, quando $2{,}50 \leq k < 3{,}00$ o sistema é estável e atrai os valores estimados para uma região específica. Quando $k = 3{,}00$ ocorre uma bifurcação e os valores estimados começam a oscilar de forma regular em duas regiões. Quando $k = 3{,}45$ ocorrem mais duas bifurcações e os valores estimados oscilam regularmente em quatro regiões. Porém, quando $k = 3{,}57$ o sistema é caótico, instável e os valores estimados oscilam de maneira irregular em diversas regiões.

[Aqui Figura 1]

Ainda, a respeito da Figura 1, é necessário fazer uma importante observação. Existem regiões no diagrama de bifurcação, para valores de $k > 3{,}57$, em que o sistema não é caótico. Mais

precisamente, quando k = 3,83 os valores estimados são atraídos para apenas três regiões regulares. Portanto, para valores de 3,57 $\leq$ k $\leq$ 4,00 existem intervalos onde uma pequena variação no valor de *k* torna um sistema ordenado em um sistema desordenado e vice-versa.

Após essa breve apresentação, é necessário enfatizar que um sistema caótico é um sistema determinístico, o que significa dizer que ele tem seu comportamento determinado por algum tipo de equação diferencial determinística. Desse modo, a evolução de um sistema caótico não apresenta desordem absoluta, mas sim, uma determinada ordem que, devido a sua hipersensibilidade a condições iniciais e de sua estrutura não-linear e complexa, é praticamente imprevisível a longo prazo, independente de se obter uma equação com parâmetros altamente significativos.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Um dos paradigmas da ciência até o início do século 20 foi o determinismo, ou seja, a preocupação com uma completa descrição dos sistemas através de um conjunto de equações, de maneira a predeterminar o seu comportamento. Essa idéia é a base do que se chama hoje de mecânica clássica ou newtoniana, em homenagem a seu célebre expoente Isaac Newton. Segundo Newton (1687), conhecendo-se o estado de um sistema num instante inicial e sua variação entre dois instantes quaisquer, pode-se determinar seu estado em qualquer outro instante do futuro. Em outras palavras, se a posição e a velocidade de um objeto pode ser medida, então sua posição futura pode ser determinada.

A obra de Newton, em mecânica, baseada nas suas três famosas leis, Lei da inércia, Lei da força e Lei da ação e reação, foi o fundamento do determinismo laplaciano. Segundo Laplace (1814) não há lugar para o acaso. Tanto os maiores quanto os menores corpos do universo podem ter seus movimentos modelados pelas equações. Assim, em certo grau, se forem conhecidas as posições e as velocidades de uma partícula em um determinado momento, então pode-se determinar suas posição e velocidade em qualquer outro momento, tanto do passado quanto do futuro.

Embora a idéia de Newton de pré-determinar o futuro possa parecer extravagante, foi considerada muito avançada frente as idéias até então em evidência. Por exemplo, frente as idéias de Descartes, em torno do ano de 1637. Os cartesianos, discípulos de Descartes, consideravam irracional a idéia de que existiam forças de atração à distância entre corpos, para eles a explicação deveria ser mais mecanicista como uma engrenagem e nada de forças à distância. Mais tarde, com a publicação do princípio da incerteza, o físico Heisenberger (1927) reduz o impacto das idéias de Newton. Segundo o princípio da incerteza de Heisenberger, quanto mais se tenta medir a posição de uma partícula, menos exatamente se

consegue medir a sua velocidade e vice-versa, isso influência diretamente a previsibilidade de qualquer sistema.

Ruelle (1991) cita que, na prática, nunca é perfeitamente conhecido o estado de um sistema no instante inicial. Assim, sempre existirá um pouco de acaso, que no longo prazo se manifestará na forma de uma grande distorção nos resultados. De fato, essa idéia não é nova e foi primeiramente demonstrada pelo matemático francês Hadamard (1898), apoiado posteriormente pelas demonstrações do físico Duhem (1906). Para um melhor entendimento da demonstração de Hadamard sobre a dependência hipersensível das condições iniciais, é necessário recorrer a um exemplo sobre um jogo de bilhar descrito por Ruelle (1991).

No exemplo do jogo de bilhar, uma bola (A) é colocada em movimento na direção de outra bola (B). Depois de várias colisões com várias outras bolas e contra as bordas da mesa, a bola (A) estaciona num lugar específico sobre a mesa. Observe-se que, se a bola (A) fosse colocada em movimento com uma ínfima diferença no ângulo de deslocamento na mesma direção à bola (B), após várias colisões, realizaria outro percurso e estacionaria num lugar totalmente diferente do anterior. Portanto, a ínfima diferença na medida do ângulo do deslocamento da bola (A) perturba totalmente o resultado final.

O matemático e filósofo francês Poincaré (1908) analisou a influência que dois grandes corpos exerciam sobre uma pequena partícula. A idéia era de que a partícula teria sua trajetória influenciada pela atração dos grandes corpos. Poincaré relatou que uma pequena alteração na posição inicial da partícula em relação aos corpos conduz a um resultado completamente diferente; salientou, ainda, que um pequeno erro inicial resultará num enorme erro no futuro e isso torna as previsões impossíveis, portanto, tem-se um fenômeno fortuito.

Segundo Poincaré (1908) um campo que merece destaque está relacionado aos fenômenos meteorológicos. Para ele na meteorologia existe uma grande dependência a condições de um estado inicial. O fato de que o estado inicial não é conhecido com exatidão torna as previsões meteorológicas com mais de uma ou duas semanas de antecedência cercadas de pouca confiabilidade. O fato de se descobrir que não é possível realizar previsões meteorológicas a longo prazo favorece a atribuição dos fenômenos ao acaso, e isso não deve ser confundido com tendências das estações do ano.

O meteorologista Lorenz (1963), em seu estudo sobre o comportamento de alguns fenômenos atmosféricos, acabou por fornecer um exemplo prático de dependência hipersensível a condições iniciais ou de erros das medidas. Numa de suas várias simulações, por uma questão de economia de papel e de tempo, Lorenz utilizou apenas três casas decimais ao invés do número completo, ou seja, para a observação 0,765127 ele digitou apenas 0,765. O resultado

da simulação com apenas três casas decimais divergiu drasticamente do resultado obtido com os valores originais. A Figura 2 ilustra um exemplo semelhante, onde é realizada uma simulação com o valor inicial de x_t = 0,70000 e, após, outra simulação com o valor correto 0,70001. A simulação é realizada com a equação logística $x_t = 3{,}75x_{t-1}(1 - x_{t-1})$.

[Aqui Figura 2]

Quando plotadas conjuntamente num gráfico, a simulação com os valores originais e a simulação com os valores arredondados formaram uma imagem semelhante ao bater de asas de uma borboleta, pois as duas simulações tinham traçados diferentes. Essa imagem ficou conhecida como efeito borboleta. Segundo Stewart (1990), o efeito de um bater de asas de uma borboleta hoje, produz uma ínfima mudança no estado da atmosfera e, com o passar do tempo, essa mudança poderá tanto provocar um tornado, quanto evitar que um aconteça. Essa passou a ser uma das características mais marcantes de sistemas caóticos, a dependência hipersensível às condições iniciais.

TESTE PARA DETECTAR CAOS NO MERCADO FINANCEIRO

A idéia da imprevisibilidade no mercado de ações tem como base o modelo de caminho aleatório. Assim, a melhor previsão para o preço de amanhã é o preço de hoje, ou seja, $E_t(x_{t+1} \mid W_t) = x_t$, onde W_t é o conjunto de informações no tempo t que já está refletido no preço. É comum o modelo de caminho aleatório ser escrito na forma $x_{t+1} = x_t + e_t$, onde e_t é a variação que ocorre no preço de um período para outro. Sob a hipótese do caminho aleatório, e_t (t = 1, ..., n) é imprevisível dado um conjunto de informações W_t, pois o preço já reflete todo o conjunto de informações disponíveis. A imprevisibilidade das variações de preço, no sentido de não possibilitar a formulação de estratégias de negociação que assegurem lucros acima do normal, é conhecida como Hipótese de Mercados Eficientes. A maioria dos testes para caminho aleatório são baseados em modelos lineares.

Por outro lado, um sistema caótico é um sistema não-previsível para o longo prazo, embora seja determinista e possa ser um pouco previsível em curtos intervalos de tempo. Sob a hipótese de caos a previsibilidade se deteriora exponencialmente com os aumentos dos intervalos de tempo. Sistemas caóticos também têm uma memória muito curta para um pequeno histórico de seu passado. Como conseqüência, a estatística padrão, utilizada nos testes de caminho aleatório, não pode ser utilizada para verificar se uma série de tempo é caótica, mas pode ser utilizada para rejeitar a hipótese nula de que a série seja independente e identicamente distribuída (i.i.d.).

Rejeitar a hipótese nula i.i.d., em dados pré-filtrados de dependência linear, não significa aceitar a hipótese alternativa de comportamento caótico. Esse é o caso do mais famoso teste para detectar estruturas não-lineares, o teste BDS, desenvolvido por Brock, Dechert e Scheinkman (1987). O teste BDS é baseado na correlação dimensional sugerida por Grassberger e Procaccia (1983). O teste BDS é indicado apenas para investigar evidências sobre a dependência não-linear e essa é uma condição necessária, mas não suficiente para caos. Essa questão é discutida de forma exaustiva em Barnett et al. (1998).

Atualmente, são muitos os *softwares* disponíveis para identificar caos em uma série de dados. Um dos limitantes para o uso desses *softwares* é a necessidade de se ter um certo domínio dos termos técnicos e do conhecimento da área da Física. Porém, Gilmore (1993) apresentou um teste para detectar caos, denominado de *close returns*. O teste *close returns* é um teste simples, de fácil aplicação e que não requer de seu usuário prévios conhecimentos da área da Física.

O teste *close returns* foi desenvolvido com base na formulação topológica do caos descrita por Tufillaro et al. (1990), Mindlin e Gilmore (1992) e, mais recentemente, por Gilmore (1998). É um teste de duplo enfoque, tanto qualitativo quanto quantitativo. Enquanto que o teste BDS procura detectar um possível afastamento da hipótese i.i.d., o teste *close returns* foi estruturado para capturar estruturas caóticas que, notadamente, apresentam órbitas periódicas instáveis.

A idéia básica do teste *close returns* é identificar a existência de órbitas periódicas instáveis em várias dimensões, que são atribuídas aos atratores estranhos. Nesse ponto é importante salientar algo sobre os atratores estranhos. Segundo Ruelle (1991), os atratores estranhos não são curvas ou superfícies lisas, mas objetos de dimensões não inteiras que Mandelbrot (1977) designou de *fractais*. Desse modo, uma linha reta tem um *fractal* de 1,0, um quadrado 2,0 e um cubo 3,0. Segundo Larrain (1991), o gráfico da evolução dos preços das ações deverá ter um *fractal* entre 1,3 a 1,4.

Segundo Gilmore (1998) a formulação topológica do caos, base do teste *close returns*, procura evidências de caos no comportamento recursivo de uma série de tempo. Para uma série caótica, espera-se que seu comportamento recursivo esteja perto de uma determinada órbita periódica instável, devendo ser repelida ou atraída para outras regiões conforme a ação do atrator estranho. Deve ficar claro que uma órbita periódica instável não é estática, logo, nunca se reproduzirá perfeitamente.

Para uma série caótica $\{x_t\}$, onde t = 1, ..., n, espera-se que qualquer observação específica ocorra perto de uma órbita periódica, desse modo, observações subseqüentes deverão aparecer

por perto da série depois de um intervalo de tempo i , onde i = 1, ..., n-1. Portanto, conforme Gilmore (1993), a diferença entre x_t e x_{t+1} deverá ser muito pequena e, por conseqüência, x_{t+1} deverá estar próximo de x_{t+1+i} e, x_{t+2} perto de x_{t+2+i}. A essência do teste *close returns* é, justamente, identificar segmentos nos dados onde a diferença $|x_t - x_{t+i}|$ seja muito pequena.

A identificação dos *close returns* em uma série de dados é realizada pelo cálculo de todas as diferenças $|x_t - x_{t+i}|$. Após, deve-se verificar se essas diferenças são muito pequenas comparando-as com um valor limite e. Segundo Gilmore (1993), o valor de e é um pequeno percentual da maior diferença entre quaisquer dois valores do conjunto de dados, geralmente de 2 a 5% dessa diferença. Essas informações são, então, colocadas em forma de gráfico. Assim, se $e > |x_t - x_{t+i}|$, o resultado será um ponto azul (•) no gráfico, e um ponto branco ( ) para os demais casos. A Figura 3 ilustra o gráfico dos *close returns* para uma série caótica.

[Aqui Figura 3]

O enfoque qualitativo do teste se dá pela observação visual do gráfico dos *close returns*. A Figura 3 tem representado no eixo horizontal os valores de *t* observações e no eixo vertical os valores de *i*. Nesse caso específico, a figura representa um *box-plot* 200x200 de uma série caótica gerada por uma equação logística $x_t = kx_{t-1}(1 - x_{t-1})$, onde k = 3,75 é o atrator estranho e x é uma variável, tal que $0 < x < 1$. Observa-se que agrupamentos de *close returns* aparecem como segmentos de linha horizontais que indicam a existência de órbitas periódicas instáveis. Em contraste, a Figura 4 apresenta a distribuição dos *close returns* para uma série aleatória.

[Aqui Figura 4]

Se a série temporal apresentar comportamento aleatório, os *close returns* deverão estar distribuídos de forma aleatória, exibindo uma dispersão uniforme sem a definição de segmentos de linha horizontais. Esse é o caso ilustrado pela Figura 4, onde são apresentados os *close returns* de uma série aleatória gerada com o auxílio da planilha do Excel.

O enfoque quantitativo do teste *close returns* é desenvolvido tendo por base a construção de um histograma que registra a incidência dos pontos azuis. A Figura 5 ilustra um histograma para os pontos azuis da Figura 3. O histograma tem sobre o eixo horizontal os valores de *i*, e sobre o eixo vertical os valores de $H(i)$, onde $H(i) = \Sigma\, \Theta(\varepsilon - |x_t - x_{t-i}|)$; Θ é a função *heaviside* tal que $\Theta(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $\Theta(x) = 0$ se $x < 0$.

[Aqui Figura 5]

Para dados caóticos, o histograma de freqüência dos *close returns* deverá evidenciar claramente a existência de uma série de picos, valores de $H(i)$ muito superiores a seu valor

médio. Esse fenômeno é bem evidenciado na Figura 5. Em contraste, uma série de valores aleatórios deverá apresentar um histograma com valores de $H(i)$ distribuídos de maneira uniforme como ilustrado pela Figura 6.

[Aqui Figura 6]

As Figuras 5 e 6 estão na mesma escala de valores de modo a facilitar a identificação das significativas diferenças entre ambas. A Figura 5, série caótica, apresenta valores de $H(i)$ entre 0 e 36, que estão bem dispersos em relação ao valor médio de 6,70. Por outro lado, a Figura 6 apresenta os valores de $H(i)$ entre l e 16, bem concentrados em torno de um valor médio de 7,14.

A verificação estatística da hipótese de que $H(i) = \bar{H}$, é realizada pela aplicação do teste qui-quadrado. Se a série é i.i.d., o valor do teste qui-quadrado calculado deverá ser inferior ao qui-quadrado tabelado. Caso contrário, fica evidenciada alguma dependência não-linear na série temporal. No exemplo anterior, para a série caótica, o teste qui-quadrado foi de 1.170, bem superior ao valor tabelado de 232,91. Para a série aleatória, o qui-quadrado calculado foi de 178, abaixo do valor crítico. Para ambos os casos, considerou-se i-1 graus de liberdade, onde i = 200.

ASPECTOS METODOLÓGICOS E DADOS

A pesquisa está direcionada para o mercado de ações como um todo e não sobre seus componentes. Em outras palavras, o estudo assume que o Ibovespa, Índice da Bolsa de Valores de São Paulo, é representativo das ações negociadas no mercado. Os dados utilizados foram obtidos junto ao banco de dados da Economática e abrange o período de 29/12/1994 e 27/06/2001, totalizando 1.604 observações diárias das variações dos preços de fechamento. A Tabela 1 apresenta a estatística descritiva das variações em quatro subperíodos de tempo.

[Aqui Tabela 1]

O índice de mercado foi investigado sob três óticas, moeda local (Real), moeda local ajustada à inflação e em dólar. O retorno em moeda local traz como característica a influência da estabilidade da economia, medida pela inflação, com o retorno ajustado à inflação, procura-se representar apenas a rentabilidade real, expurgando-se os efeitos inflacionários. O retorno em dólar foi considerado para possibilitar futuras comparações com os mercados internacionais, em termos de investidores globais, para o quais os valores em moeda local têm um significado menos expressivo.

Observando-se os valores na Tabela 1, pode-se constatar que, desconsiderando os efeitos da inflação e das variações do câmbio, em todos os subperíodos, os investidores obtiveram

ganhos nominais, porém, expurgando-se tais efeitos os investidores só obtiveram ganhos nos dois primeiros subperíodos, tanto em termos reais, quanto em dólar. Um fato que merece destaque é que para os quatro subperíodos não há uma relação positiva entre risco e retorno. Conforme a teoria de Finanças, quanto maior o nível de exposição ao risco, maior deverá ser o retorno esperado.

De modo mais específico, constata-se que o terceiro subperíodo foi o que apresentou maior grau de risco ao investidor, mas esse está associado a um retorno esperado negativo. Mesmo considerando os primeiro e segundo subperíodos, onde os retornos médios foram positivos, a relação com o desvio padrão é inversa, maior grau de risco associado a um menor nível de retorno esperado.

Os coeficientes de assimetria e excesso de curtose fornecem informações importantes. Os três primeiros subperíodos apresentam elevados coeficientes de excesso de curtose em relação a uma distribuição normal. O excesso de curtose caracteriza uma curva de distribuição de freqüência mais achatada do que a curva de uma distribuição normal. A assimetria caracteriza o formato da extensão da cauda da distribuição de freqüência, observa-se que a assimetria tende a oscilar conforme o subperíodo, para os primeiro e terceiro subperíodos ela se estende mais para a direita, nos segundo e terceiro subperíodos ela se estende mais para a esquerda.

Os valores máximo e mínimo da rentabilidade, por sua vez, identificam o terceiro subperíodo como o que apresenta maiores variações bruscas de rentabilidade, indo de -7,482% até 12,515%, em termos de rentabilidade real, o que é consistente com o elevado desvio padrão desse subperíodo. Por outro lado, o quarto subperíodo é o que se mostra mais comportado, apresentando reduzidos coeficientes de desvio padrão, assimetria e curtose, se aproximando-se mais de uma distribuição normal.

A normalidade da distribuição das taxas de retorno é verificada pela aplicação do teste de Jarque e Bera (1987) obtido pela fórmula JB = [(assimetria)^2/6 + (excesso de curtos)^2/24]. Sob a hipótese nula de que as taxas de retorno estão de acordo com uma distribuição normal, o teste de Jarque e Bera (JB) segue uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Os valores do teste de normalidade, apresentados na Tabela 1, evidenciam que, para os primeiro, segundo e terceiro períodos, as séries divergem fortemente de uma distribuição normal. Essa situação é amenizada no quarto subperíodo onde somente a série em dólar diverge da distribuição normal a 5%, mas não a 1%.

Para verificar a existência de comportamento caótico no mercado de ações, foi aplicado o teste qui-quadrado nos histogramas de freqüência gerados pelos *close returns* do índice de mercado nos quatro subperíodos de tempo, tomados em moeda local, ajustado à inflação e em

dólar. Objetivando eliminar a influência de dependência linear, também, foram investigados os dados pré-filtrados por um modelo autoregressivo. Dessa forma, espera-se que, após eliminada a dependência linear, nenhum outro tipo de dependência ainda existirá sobre os resíduos do modelo.

Deve-se resaltar que o teste é aplicado nos *box-plots.* O *box-plot* é um intervalo bidimensional de (*t*)x(*i*) observações. Nesse caso H_i e sua média são estimados para cada *box* de tamanho (*t*)x(*i*) onde $t = i = 20, 30, 40, 50$ e 200. Os valores do teste qui-quadrado calculados são comparados com os valores tabelados para os respectivos graus de liberdade. Essa abordagem evita possível enviesamento dos resultados atribuído a um único tamanho de *box-plot*.

RESULTADOS EMPÍRICOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos pela aplicação do teste *close returns* nas séries temporais do Ibovespa em moeda local, ajustada à inflação e em dólar, nos quatro subperíodos de tempo. Na Tabela 2 está disposto um resumo do teste qui-quadrado para os histogramas de freqüência dos *close returns* do índice. A primeira coluna identifica a extensão do *box-plot* analisado e a segunda coluna, os valores tabelados do teste qui-quadrado a 5%. As demais colunas são destinadas aos valores do teste qui-quadrado calculado em cada um dos subperíodos.

Os resultados do enfoque quantitativo do teste *close returns* evidenciam uma fraca dependência temporal não-linear complexa nas variações do Ibovespa, em moeda local, nos primeiro e terceiro subperíodos. Para o Ibovespa ajustado à inflação, uma fraca dependência é detectada nos primeiro, segundo e terceiro subperíodos, e para o Ibovespa em dólar, é identificada fraca dependência apenas no segundo subperíodo. Fraca dependência significa que não é verificada significância no teste quando este é aplicado sobre um *box-plot* menor, 20x20, 30x30, 40x40 ou 50x50.

[Aqui Tabela 2]

A Tabela 2 apresenta o resumo dos testes, agora aplicados sobre os dados pré-filtrados de dependência linear. Observa-se que, mesmo excluindo-se a dependência linear, há evidências de algum tipo de dependência não-linear complexa nas variações do Ibovespa. Porém, essa dependência não-linear é muito fraca, sendo evidenciada apenas no terceiro subperíodo para os dados em moeda local e para os segundo e terceiro subperíodos para os dados ajustados à inflação. Já, para o Ibovespa em dólar, não há indícios de dependência não-linear complexa.

[Aqui Tabela 3]

É importante salientar que os poucos indícios de dependência não-linear complexa evidenciados nos dados não fornecem subsídios suficientes para que se possa afirmar a

existência de comportamento caótico no mercado brasileiro, pois os indícios são restritos a apenas um tamanho de *box-plot* (200x200), não se manifestando em intervalos menores. Outra questão a ser colocada é que os resultados são muito sensíveis ao período analisado, não apresentando consistência ao longo dos vários subperíodos. O enfoque qualitativo do teste foi realizado através da análise gráfica a qual não é apresentada pela limitação de espaço. Pelos resultados, não ficou evidenciado nenhum tipo de estrutura que pudesse identificar a formação de órbitas periódicas instáveis, ou seja, segmentos de linhas retas na horizontal.

CONCLUSÃO

Este artigo teve como objetivo investigar a possível presença de comportamento caótico nas variações de preço no mercado de ações através da análise do índice da bolsa de valores de São Paulo, Ibovespa. As variações diárias do índice foram analisadas em moeda local, moeda local ajustada à inflação e em dólar, cobrindo quatro subperíodos de tempo. A metodologia de investigação envolveu a aplicação do teste *close returns*, tanto no enfoque qualitativo, quanto no enfoque quantitativo.

Os resultados obtidos pelo enfoque quantitativo do teste mostram a evidências de que existe um certo grau de dependência não-linear complexa nas variações do índice de mercado em termos de moeda local e moeda local ajustada à inflação, tanto para dados brutos, quanto para dados pré-filtrados da dependência linear. Porém, essas evidências são fracas e muito sensíveis, não persistindo em todos os subperíodos. Para dados em dólar não há evidências de dependência não-linear complexa em nenhum dos sub-períodos, considerando os dados pré-filtrados da dependência linear.

Deve-se ressaltar que a evidência de fraca dependência não-linear complexa não é suficiente para sustentar a existência de caos no Ibovespa. Essa afirmação é, também, sustentada pela abordagem qualitativa do teste *close returns*, onde não ficou evidente a existência de órbitas periódicas instáveis. Por outro lado, os resultados obtidos não excluem a possibilidade de dependência não-linear não-complexa, mais precisamente a dependência autoregressiva heteroscedástica, comum em dados financeiros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELIER, L. Theory of speculation (1900). In: COOTNER, P. H. (Ed.*)* *The random character of stock market prices*. Cambridge: MIT Press, p. 17-78, 1964.

BARNETT, W. A.; GALLANT, A. R.; HINICH, M. J.; JUNGEILGES, A. J.; KAPLAN, D T.; JENSEN, M. J. A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos. *Journal of Econometrics*, v. 82, n. 1, p. 157-192, 1998.

BROCK, W.; DECHERT, W.; SCHEINKMAN, J. A test for independence based on correlation dimension. *Working Paper*, University of Wisconsin, 1987.

DUHEM, P. *Théorie physique*. Paris: Chevalier et Riviére, 1906.

GILMORE, C. G. A new test for chaos. *Journal of Economic Behavior and Organization*, v. 22, n. 2, p. 209-237, 1993.

GILMORE, C. G. An examination of nonlinear dependence in exchange rates, using recent methods from chaos theory. *Global Finance Journal*, v. 12, p. 139-151, 2001.

GILMORE, R. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Review of Modern Physics*, v. 70, n. 4, p. 1455-1530, 1998.

GLEICK, J. *Chaos: making a new scien*ce. New York: Viking Publishing, 1987.

GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Measuring the strangeness of attractors. *Physica* D, v. 9, p. 189-208, 1983.

HADAMARD, J. Les surfaces à courbures opposssés et leurs lignes géodésiquis. (1898). In: RUELLE, D. *Chance and chaos*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1991.

HEISENBERG, W. Princípio da incerteza (1927). In: HAWKING, S. *O universo numa casca de noz*. São Paulo: Mandarim, 2001.

HENON, D. A. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Plysics*, v. 50, p. 69-77, 1976.

JARQUE, C. M.; BERA, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, v. 55, p. 163-172, 1987.

LAPLACE, P. S. *Essai phylosophique sur les probabilitès*. Paris: Courcier, 1914.

LARRAIN, M. Testing chaos and nonlinearities in T-bill rates. *Financial Analysts Journal*, p. 51-62, September/October, 1991.

LO, A. W.; MACKINLAY, C. Stock market prices do not random walks: evidence from a simple specification test. *Review of Finance Studies*, v. 1, n. 1, p. 41-66, 1988.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, p. 130-141, 1963.

MANDELBROT, B. *The geometry of nature*. New York: W. H. Freeman, 1977.

MINDLIN, G. B.; GILMORE, R. Topological analysis and synthesis of chaotic time series data. *Physica*, D, v. 58, p. 229-242, 1992.

NEWTON, I. Principia mathematica (1687). In: HAWKING, S. *O universo numa casca de noz*. São Paulo: Mandarim, 2001.

POINCARÉ, H. *Science et Méthode*. Paris: Ernest Flammarion, 1908.

RUELLE, D. *Chance and chaos*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1991.

TUFILLARO, N. B.; SOLARI, H.; GILMORE, R. Relative rotation rates: fingerprints for strange attractors. *Physica Review* A, v. 41, p. 5717-5728, 1990.

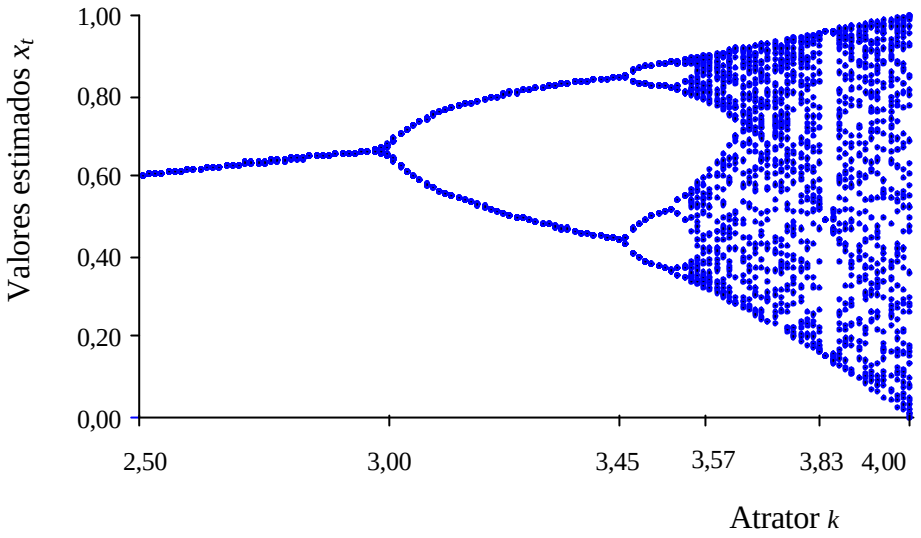


Figura 1. Diagrama de bifurcação

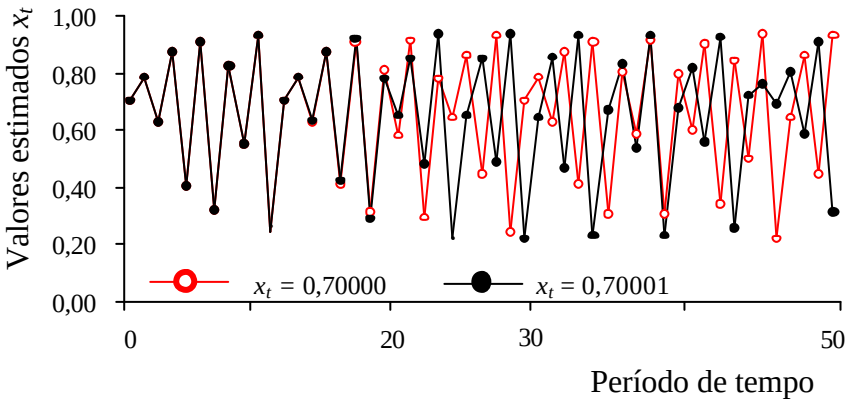


Figura 2. Hipersensibilidade a condições iniciais

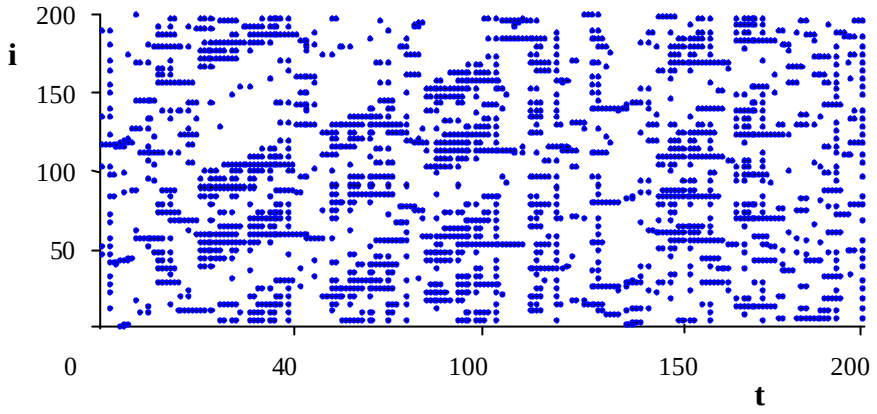


Figura 3. *Close returns* para uma série caótica

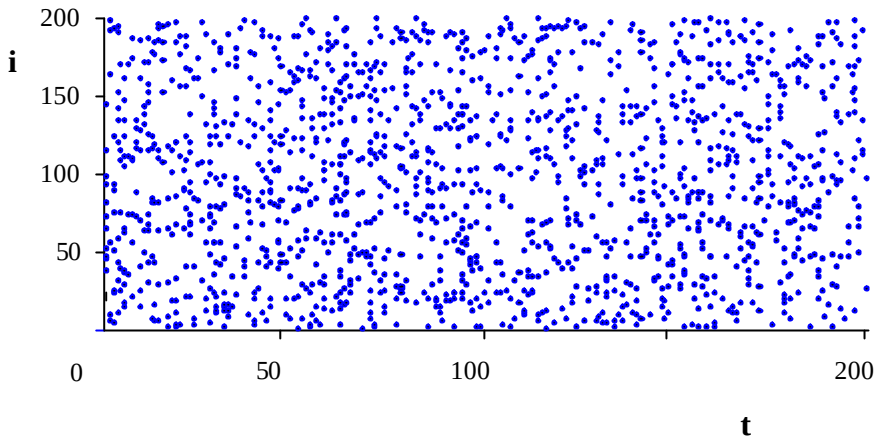


Figura 4. *Close returns* para uma série aleatória

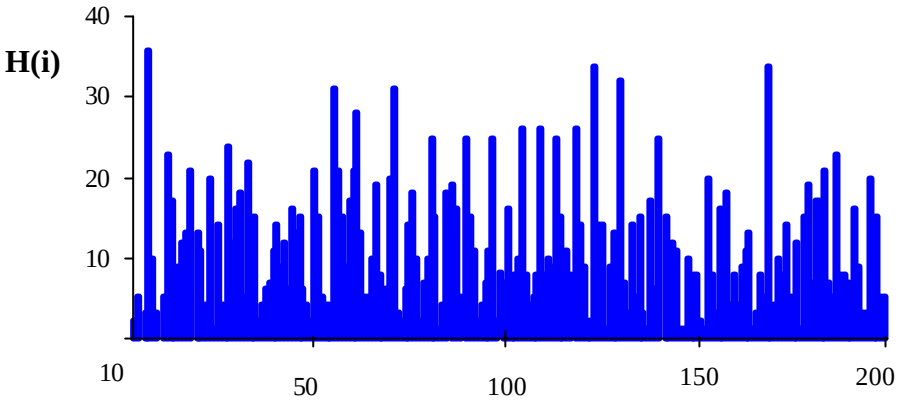


Figura 5. Histograma de freqüência dos *close returns* de uma série caótica

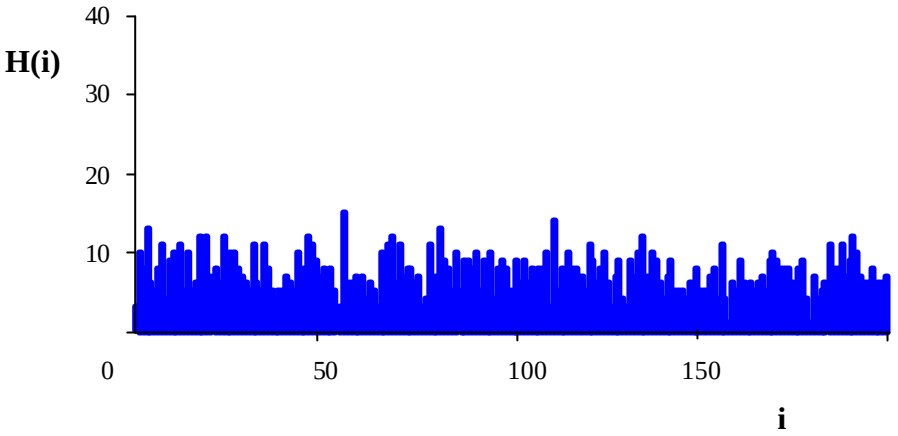


Figura 6. Histograma de freqüência dos *close returns* de uma série aleatória

Tabela 1. Estatística descritiva das variações diárias dos preços de Fechamento do Ibovespa[1].

Estatística descritiva das variações do Ibovespa (%)	Subperíodos			
	29/12/1994 15/08/1996	16/08/1996 27/03/1998	30/03/1998 12/11/1999	16/11/1999 27/06/2001
Em moeda local				
Média	0,045	0,068	0,010	0,009
Desvio Padrão	1,305	1,069	1,551	0,876
Assimetria	1,014	-1,185	1,248	-0,036
Excesso de Curtose	9,619	7,983	12,968	0,193
Máximo	9,907	4,022	12,515	3,186
Mínimo	-4,509	-7,046	-7,482	-2,860
Normalidade - JB	1.614,66**	1.158,64**	2.913,92**	0,71
Ajustado à inflação				
Média	0,021	0,057	-0,006	-0,008
Desvio Padrão	1,313	1,071	1,554	0,885
Assimetria	0,985	-1,163	1,261	-0,014
Excesso de Curtose	9,403	7,873	12,912	0,114
Máximo	9,907	4,022	12,515	3,186
Mínimo	-4,509	-7,046	-7,482	-2,860
Normalidade - JB	1.542,13**	1.126,05**	2.891,88**	0,23
Em dólar				
Média	0,027	0,055	-0,047	-0,010
Desvio Padrão	1,336	1,073	1,588	0,997
Assimetria	1,019	-1,210	0,187	-0,150
Excesso de Curtose	10,398	8,067	4,369	0,538
Máximo	10,300	4,026	7,942	3,103
Mínimo	-4,877	-7,105	-7,490	-3,639
Normalidade - JB	1.875,88**	1.185,17**	321,27**	6,34*

1. As variações dos preços foram calculadas em termos de logaritmo da razão entre os preços e correspondem à rentabilidade diária do índice, mais precisamente $r_{ib} = \ln(p_t/p_{t-1})$x100.

* Significativo a 5%, ** significativo a 1% (testes qui-quadrado, 2 graus de liberdade).

Tabela 2. Teste qui-quadrado (χ^2) para os histogramas de freqüência dos *close returns* do Ibovespa

Tamanho do *box-plot*	Valor do teste χ^2 tabelado a 5%	Subperíodos			
		29/12/1994 15/08/1996	16/08/1996 27/03/1998	30/03/1998 12/11/1999	16/11/1999 27/06/2001
Em moeda local					
20x20	30,10	13,33	18,00	6,57	19,33
30x30	46,60	23,89	25,36	14,97	25,35
40x40	54,54	26,17	41,81	20,14	36,02
50x50	66,29	34,70	49,11	23,17	31,43
200x200	232,91	234,48*	224,03	313,07**	166,71
Ajustado pela inflação					
20x20	30,10	13,33	18,18	8,36	15,33
30x30	46,60	24,90	26,02	16,62	21,21
40x40	54,54	25,90	44,31	27,17	28,30
50x50	66,29	34,73	53,13	25,78	30,43
200x200	232,91	234,04*	233,47*	278,78**	195,12
Em dólar					
20x20	30,10	13,88	19,33	12,24	18,84
30x30	46,60	23,95	23,36	22,10	44,38
40x40	54,54	25,06	37,44	28,00	42,29
50x50	66,29	29,44	45,99	28,76	55,08
200x200	232,91	214,54	237,72*	207,37	178,53

Obsevações:

Teste qui-quadrado é dado por $\chi^2 = \Sigma[(f_o - f_e)^2/f_e]$, onde f_o é a freqüência observada e f_e é a freqüência esperada. Para dados caóticos, espera-se que $\chi^2_{calculado} > \chi^2_{tabelado}$.

* Significativo a 5%; ** Significativo a 1%.

Tabela 3. Teste qui-quadrado (χ^2) para os histogramas de freqüência dos *close returns* do Ibovespa pré-filtrado da dependência linear

Tamanho do *box-plot*	Valor do teste χ^2 tabelado a 5%	Subperíodos			
		29/12/1994 15/08/1996	16/08/1996 27/03/1998	30/03/1998 12/11/1999	16/11/1999 27/06/2001
Em moeda local					
20x20	30,10	14,11	12,90	9,32	22,89
30x30	46,60	14,31	32,30	14,92	20,73
40x40	54,54	21,59	40,87	15,40	30,42
50x50	66,29	30,21	49,49	24,82	40,37
200x200	232,91	206,25	227,64	306,87**	199,69
Ajustado pela inflação					
20x20	30,10	15,14	11,92	15,40	22,00
30x30	46,60	16,64	28,64	19,40	22,25
40x40	54,54	26,51	39,33	21,90	35,22
50x50	66,29	30,16	45,91	30,78	42,10
200x200	232,91	208,48	238,32*	305,09**	196,60
Em dólar					
20x20	30,10	13,03	13,66	8,32	15,09
30x30	46,60	13,44	27,66	19,20	26,33
40x40	54,54	20,08	38,61	27,87	32,36
50x50	66,29	31,05	40,80	33,03	47,58
200x200	232,91	186,91	196,06	212,02	172,57

Obsevações:

Dados pré-filtrados de dependência linear pelo modelo autoregressivo dado por: $x_t = a + b_1x_{t-1} + b_5x_{t-5} + b_6x_{t-6} + b_8x_{t-8} + b_9x_{t-9} + b_{10}x_{t-10}$. Teste qui-quadrado é dado por $\chi^2 = \Sigma[(f_o - f_e)^2/f_e]$, onde f_o é a freqüência observada e f_e é a freqüência esperada. Para dados caóticos, espera-se que $\chi^2_{calculado} > \chi^2_{tabelado}$.

* Significativo a 5%; ** Significativo a 1%.