ZeroMath: Um aplicativo para o auxílio no Ensino e aprendizagem de zero de funções

ZeroMath: An application to help in teaching and learning zero functions

João Pedro N. da Silveira[1], Lucas M. da Cunha[1]

[1]Departamento Acadêmico de Ciência da Computação (DACC) – Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

pedrozle@outlook.com, lucas.marques@unir.br

Abstract. *Teaching and learning mathematics have always presented difficulties for both students and teachers. The use of technological resources has helped to mitigate such difficulties. This article presents the proposal for developing an application to assist in teaching Function Zeros. Due to the difficulty of many students in higher education in understanding the subject, the proposal aims to simplify and clarify the processes involved in solving equations using numerical methods. For the development of the application, information was collected about the Bisection, Secant, False Position, Newton-Raphson, and Fixed-Point methods. The application was developed with Flutter and uses libraries to perform calculations and display interactive graphics of each equation, allowing the student to understand the resolution of such methods. The results show that the application can perform calculations and displaying relevant data about the equations and their roots in detail.*

Keywords: *Numerical Methods. Zero of Function. Educational Application. Interactive Graphics.*

Resumo. O ensino-aprendizagem da matemática sempre apresentou dificuldades tanto para alunos quanto para professores. O uso de recursos tecnológicos tem ajudado a mitigar tais dificuldades. Este artigo apresenta a proposta do desenvolvimento de um aplicativo para auxiliar o ensino de Zeros de Funções. Devido à dificuldade de muitos estudantes no ensino superior em compreender o assunto, a proposta visa simplificar e esclarecer os processos envolvidos na resolução de equações por métodos numéricos. Para o desenvolvimento do aplicativo, foram coletadas informações sobre os métodos Bisseção, Secante, Falsa Posição, Newton-Raphson e Ponto Fixo. O aplicativo foi desenvolvido com Flutter e utiliza bibliotecas para realizar os cálculos e fazer a exibição dos gráficos interativos de cada equação, permitindo que o aluno possa de fato compreender a resolução de tais métodos. Os resultados mostram que o aplicativo é capaz de realizar os cálculos e exibir de maneira detalhada dados relevantes sobre as equações e suas raízes.

Palavras-chave: Métodos Numéricos. Zero de Funções. Aplicativos Educacional. Gráficos Interativos

1. Introdução

O ensino-aprendizagem da matemática sempre apresentou dificuldades tanto por parte dos alunos quanto dos professores. O uso de recursos tecnológicos tem ajudado a mitigar tais dificuldades. Este artigo apresenta a proposta do desenvolvimento de um aplicativo para dispositivos móveis, para auxiliar o ensino de Zeros de Funções. Devido à dificuldade de muitos estudantes no ensino superior em compreender o assunto, a proposta desse aplicativo visa simplificar e esclarecer, de maneira prática e visual, os processos envolvidos na resolução de equações por métodos numéricos, com a exibição de gráficos interativos que permitem que o aluno de fato compreenda a resolução de tais métodos. [Resende e da Gloria B.F Mesquita 2013]

De modo geral, essas dificuldades são percebidas notoriamente no ensino básico. Embora tenha havido um aumento no investimento em recursos didáticos, ainda é necessário investir em capacitação docente. Tais dificuldades não são percebidas somente no âmbito escolar; é possível notar também familiares pouco preocupados com o ensino de seus filhos. Segundo [do Prado Souza 2009], "é importante que a família esteja engajada no processo ensino-aprendizagem. Isto tende a favorecer o desempenho escolar, visto que o convívio da criança com a família é muito maior do que o convívio com a escola". Outro fato que colabora para o surgimento de tais dificuldades é a falta de interesse dos alunos no conteúdo ensinado. É exigido que o docente busque métodos de ensino que sejam mais atraentes para os alunos, de modo que eles tenham um interesse maior no conteúdo.

Pacheco e Barros (2013, p.5) dizem que,

> *O ensino da matemática é uma das preocupações da educação matemática vivenciada nos mais diversos centros acadêmicos do mundo. Muitas discussões levam os educadores a refletir acerca da adoção das melhores alternativas de ensino que proporcionam uma aprendizagem discente mais significativa.*

A maior causa desse problema é o ensino de baixa qualidade durante o percurso do ensino fundamental e médio, ou, por vezes, até inexistente devido à baixa remuneração dos profissionais e à frustração dos professores. [Brasil Escola sd]

Este problema se prolonga por toda a vida acadêmica do discente, especialmente para aqueles que irão ingressar na área de exatas. No que diz respeito à aprendizagem da matemática no ensino superior, para [Masola e Allevato 2019], com a democratização do acesso às instituições de ensino superior, foi possível um aumento no quantitativo de estudantes ingressantes nas universidades e faculdades. Junto a isso, a diversidade de conhecimentos dos alunos se tornou um problema, visto que os diferentes níveis de conhecimento trazem aos professores uma dificuldade maior na hora de realizar seus trabalhos.

No ensino superior, um exemplo significativo é o ensino de cálculo numérico, uma disciplina que se destaca por sua relevância multidisciplinar. O cálculo numérico não apenas aprimora as habilidades matemáticas dos estudantes, mas também oferece ferramentas essenciais para a resolução de problemas práticos em diversas áreas acadêmicas, como Engenharia, Ciência da Computação e Ciências Naturais. No contexto de ensino-aprendizagem, os assuntos abordados na disciplina, especialmente o zero de funções, exigem dos discentes um conhecimento prévio para que possam compreender o conteúdo ministrado pelo docente. Não obstante, faz-se necessário que os métodos de ensino do professor abranjam todos os níveis de conhecimento dos alunos. Isto pode ser uma tarefa desafiadora para aquelas turmas que não contam com o material necessário, tendo somente à disposição quadro branco e pincel.

Segundo [Oliveira e Drigo 2021], a maneira como a matemática é ensinada em todos os níveis de ensino, fundamental, médio e superior, apresenta os assuntos de modo linear. Desse modo, para que o aluno possa compreender um determinado assunto, é necessário que ele tenha compreendido os assuntos anteriores. Logo, pode-se constatar que uma das causas para a deficiência no aprendizado do aluno também é resultado dos recursos didáticos utilizados no ensino.

Quando o professor se depara com alunos que enfrentam dificuldades no aprendizado de um determinado tema de matemática, é importante buscar maneiras de contornar essa situação. Isso pode ser feito através de uma revisão geral do conteúdo ou da apresentação de atividades específicas, permitindo que o aluno consolide efetivamente o conhecimento.

Existem também abordagens mais recentes que visam reduzir o percentual de deficiência no aprendizado dos alunos, como, por exemplo, o uso de ferramentas como programas de computador para o ensino de diversas áreas do conhecimento no ensino superior. Segundo [Noé, 2019], o uso de computadores nas escolas é imprescindível para a formação dos estudantes, pois, além de aprenderem sobre o funcionamento básico dos computadores, auxilia no desenvolvimento do senso crítico, pensamento improvável e dedutivo, além da capacidade de observação dos alunos.

Atualmente, a sociedade está em constante evolução tecnológica. Todos os dias, é possível notar o surgimento de novos recursos destinados a auxiliar em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, temos computadores capazes de realizar cálculos mais rapidamente e celulares que permitem multitarefas. Esse crescimento acelerado das tecnologias tem favorecido o surgimento da sociedade da informação [Boeira et al. 2014]. Além disso, com o advento da internet, houve a democratização da informação, possibilitando que mais pessoas tenham acesso a um volume cada vez maior de informações.

Com a integração das tecnologias no ambiente escolar, tornou-se imprescindível que os professores possuam tanto conhecimento técnico quanto pedagógico sobre essas tecnologias. O docente deve estar apto a utilizar todo o potencial tecnológico disponível para aprimorar o processo de ensino. Segundo [Boeira et al. 2014], é fundamental que os educadores desenvolvam práticas pedagógicas que promovam a aprendizagem, integrando as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) a abordagens inovadoras. Isso permite aos estudantes interagirem e reconhecer o papel essencial da tecnologia na educação. Além disso, engloba a avaliação das posturas didático-pedagógicas tanto do professor quanto do aluno dentro desse cenário.

A utilização de tecnologias e softwares no ensino da matemática tem como objetivo mitigar esse problema. Atualmente, é possível encontrar uma variedade de softwares na internet para o aprendizado dos mais diversos temas matemáticos. Tanto softwares gratuitos de fácil acesso, como Geogebra, Symbolab e Winplot, quanto softwares pagos, oferecendo recursos adicionais. A utilização de softwares de exibição gráfica possibilita uma maior participação dos alunos durante as aulas e contribui para uma aprendizagem mais significativa. Essas ferramentas oferecem ao professor a capacidade de exibir gráficos e manipulá-los de forma interativa, facilitando a explicação e a exemplificação dos conceitos para os alunos. De acordo com [Marinho 2022], o uso dessas ferramentas promove uma aprendizagem mais significativa, com contribuições positivas tanto para a elaboração quanto para a execução da aula.

De acordo com [Marinho 2022], a aplicação de recursos tecnológicos no ambiente escolar impacta a aprendizagem dos estudantes, estimulando o aprimoramento do raciocínio lógico, a agilidade no pensamento dedutivo, a interação social, a estruturação do pensamento e a capacidade de concentração.

Uma pesquisa realizada pelo Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação [CETIC 2023] mostra que 92% da população brasileira com mais de 10 anos é usuário de smartphones. Portanto, o acesso a smartphones é maior do que o acesso a computadores no âmbito escolar. Este projeto se beneficia exatamente desse acesso, visando abranger a maior quantidade de estudantes para auxiliar o professor durante os exercícios realizados na sala de aula.

Os dispositivos móveis, como celulares e tablets, possuem uma vantagem sobre os computadores devido à sua acessibilidade e mobilidade. Isso faz com que os aplicativos educacionais tenham um alcance maior, abrangendo um público que não seria alcançado caso a aplicação estivesse restrita apenas aos computadores. Além disso, outra vantagem é a segurança do usuário, uma vez que a não utilização de navegadores aumenta o controle sobre os dados pessoais. Dessa forma, os aplicativos podem gerenciar a segurança e o acesso aos dados de forma mais clara para o usuário

Uma pesquisa sobre a existência de softwares para o ensino da matemática revelou que a maioria desses softwares são ferramentas disponíveis para instalação em computadores ou são disponibilizados na internet. Muitos desses softwares apresentam um sistema de cobrança, bloqueando partes do conteúdo para usuários que não criaram uma conta no sistema ou não realizaram o desbloqueio total da ferramenta por meio de pagamento.

Na disciplina de cálculo numérico no ensino superior, mais especificamente no estudo do zero de funções, os alunos são introduzidos a conceitos de iteração e análise gráfica, os quais demandam maior atenção e conhecimento na resolução de alguns conceitos matemáticos. Esse estudo concentra-se na determinação dos pontos em que uma função se anula, ou seja, os valores de entrada que resultam em saídas iguais a zero. A identificação desses pontos é essencial em diversos contextos, desde a otimização de processos industriais até a modelagem de fenômenos físicos complexos. Portanto, o entendimento dos métodos para encontrar o zero de funções é crucial para a análise e resolução de problemas práticos que permeiam diversas áreas da matemática aplicada e das ciências. No entanto, a dificuldade dos alunos em compreender esses conceitos avançados criou a necessidade de utilização de softwares que auxiliem no ensino deste tema, oferecendo aplicações que apresentem não somente o resultado, mas também o passo a passo da resolução e um gráfico exemplificando os dados.

Uma pesquisa sobre a existência de trabalhos voltados à resolução do zero de funções revelou diferentes abordagens. Alguns trabalhos propõem uma comparação do custo computacional entre os métodos numéricos, como demonstrado por [Valadares et al. 2018]. Outros realizam a implementação dos métodos numéricos, fornecendo como resultado o gráfico da equação e o passo a passo da resolução, conforme descrito por [Paulista et al. 2018]. Além disso, foi encontrado um trabalho que implementa os três métodos do assunto de Zero de Funções - Método da Bisseção, Método de Newton-Raphson e Método da Secante - apresentando como resultado o gráfico da equação, o passo a passo da resolução e uma tabela com os dados, conforme mencionado por [Sá et al. 2022].

No entanto, os trabalhos mencionados não abordam a aplicação de todos os cinco métodos existentes, nem são mais do que simples comparações entre esses métodos. Além disso, é importante ressaltar que as plataformas alvo desses projetos excluem os dispositivos móveis, sendo voltadas exclusivamente para computadores ou softwares disponíveis online. Diante disso, este artigo busca implementar uma solução para a resolução de métodos numéricos direcionada especificamente para dispositivos móveis.

Pensando nisso, este trabalho busca reduzir essa desvantagem ao apresentar a criação de um aplicativo para dispositivos móveis, com o objetivo de auxiliar no ensino da matemática. Este aplicativo é um software desenvolvido para dispositivos móveis, compatível com os sistemas operacionais Android[1] e iOS[2]. Ele permite calcular e encontrar com precisão a raiz de equações lineares, além de visualizar o gráfico correspondente e o passo a passo da resolução, contribuindo assim para aprimorar o entendimento sobre o assunto.

2. Métodos Numéricos

Os métodos numéricos são aplicações de algoritmos que permitem formular e resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas menos complexas. A análise numérica idealiza e desenvolve métodos para aproxi-

1 Sistema operacional para dispositivos móveis da Google.

2 Sistema operacional para dispositivos móveis da Apple.

mar eficientemente as soluções de problemas expressos matematicamente. O principal objetivo da análise numérica é encontrar soluções aproximadas para problemas complexos

Em geral, os algoritmos numéricos são classificados em dois grupos: diretos e iterativos. Os métodos diretos são aqueles que, após um número fixo de operações, levam o sistema estudado à solução. Já os métodos iterativos envolvem uma sequência de passos que visam a convergência para um valor aproximado da solução exata.

Conforme observado por [Ribeiro et al. 2012], esses métodos não encontram as raízes exatas da equação, porém, as mesmas podem ser calculadas de acordo com a precisão exigida para o problema, encerrando a execução do método quando as condições impostas pela função são satisfeitas.

Os métodos do zero de funções têm diversas aplicações no mundo real, abrangendo campos como engenharia, ciência, finanças e especialmente a computação. Essas aplicações garantem a realização de trabalhos bem-sucedidos e, em alguns casos, contribuem para a segurança e integridade física das pessoas. Na engenharia civil e mecânica, por exemplo, esses métodos auxiliam na análise de tensões e deformações em materiais. Na ciência, ajudam na resolução de problemas que envolvem a modelagem matemática de sistemas físicos, e na computação gráfica, contribuem para a resolução de equações que descrevem a geometria de objetos 3D ou a renderização de imagens.

A seguir, serão apresentadas pesquisas anteriores relacionadas ao ensino do zero de funções, um conceito matemático fundamentalmente importante tanto para o ensino teórico quanto para aplicações práticas.

2.1 Definição de Zero de Funções

Zeros de Funções, também conhecidos como raízes, são os valores de entrada que, quando aplicados a uma função, resultam em zero. Em outras palavras, um valor que, ao ser aplicado a uma função , produz .

Os métodos numéricos para encontrar os zeros de funções são aplicações de algoritmos iterativos da análise numérica. Geralmente, eles são capazes de fornecer aproximações dos resultados reais em um espaço unidimensional [Ruggiero e Rocha 1997].

2.2 Critérios de Parada

Os métodos numéricos são capazes de encontrar aproximações dos valores reais. Os métodos de Zero de Funções abordados neste artigo têm a característica de serem métodos iterativos, ou seja, realizam o mesmo cálculo várias vezes, tendendo ao infinito. No entanto, como aponta [Costa e Silva 2009], não é viável continuar um procedimento numérico indefinidamente. É necessário interrompê-lo em algum ponto específico. Essa interrupção requer a aplicação de um critério determinado, variável de acordo com a natureza do problema em questão e o nível de precisão exigido para a solução. O conjunto de condições utilizadas para encerrar as iterações de um procedimento numérico é denominado critério de parada.

Idealmente, queremos parar quando a diferença entre a solução aproximada e a solução exata (e desconhecida) for muito pequena. Seja a solução exata para uma equação, a aproximação para no passo e o valor da precisão desejada, 0.00001 = , por exemplo, podemos adotar como critério de parada quando o valor absoluto da diferença entre e for menor que a precisão .

Porém, não conhecemos o valor da solução exata , para números reais a aproximação converge para a solução se, e somente se, as diferenças sucessivas ficam cada vez menores a cada iteração.

2.3 Métodos para encontrar Zero de Funções

Para encontrar as raízes de uma função é possível utilizar diversos métodos. Dos métodos existentes, a escolha depende da natureza da função e das características que o problema exige. Alguns dos métodos iterativos usados são:

Método da Bisseção

Segundo [Sobral 2021], o método da bisseção em métodos numéricos envolve a subdivisão de um intervalo inicial pela metade, resultando em dois novos intervalos. A análise desses novos intervalos identifica qual deles contém pelo menos uma raiz real. Esse processo é repetido iterativamente até alcançar uma solução aproximada.

O método da bisseção utiliza o Teorema de Bolzano (Figura 1):

se f: [a, b] é uma função contínua tal que então existe tal que .

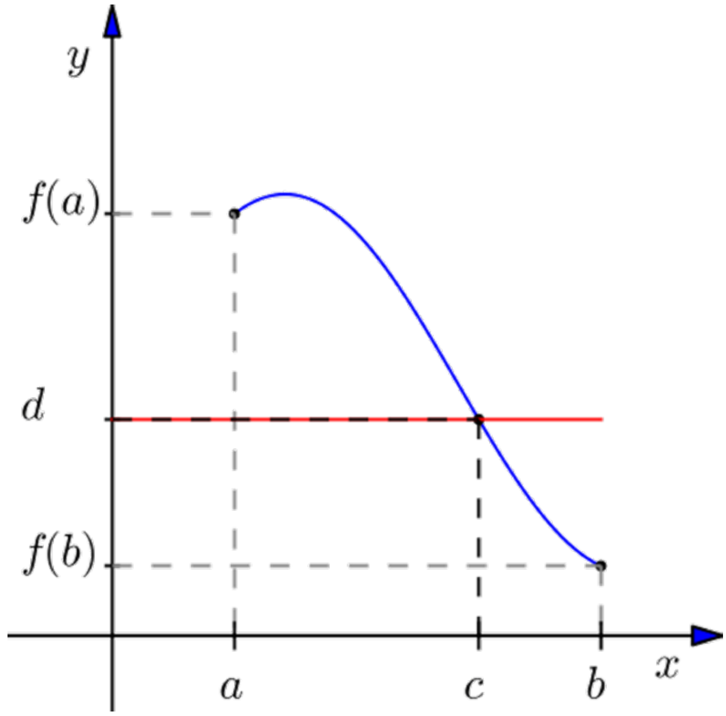

Figura 1. Representação gráfica do Teorema de Bolzano

Ou seja, sendo f uma função contínua no intervalo de tal que , o Teorema de Bolzano garante que haja pelo menos uma raiz real no intervalo .

É empregada a redução do intervalo que abriga a raiz, considerando a repetida subdivisão dos limites superior e inferior pela metade, até alcançar o número máximo de iterações estabelecido, obter o valor da raiz ou satisfazer o critério de parada determinado.

Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson, também conhecido como método das tangentes, desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson, tem o objetivo de estimar as raízes de uma função. Ele permite a aproximação de uma solução de uma função não linear a partir de um valor inicial.

O método utiliza o cálculo da equação da reta tangente, utilizando a equação derivada, ao gráfico da função nesse ponto inicial e a interceptação dos eixos das abcissas, a fim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz.

Por ser um método iterativo, cada valor de x é uma aproximação da raiz para a função escolhida, obtido através da equação:

$$x_{k+1} = \frac{x_k + f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Sendo, a equação a fim de ser encontrada a raiz, sua função derivada, é a aproximação anterior da raiz e a aproximação atual da raiz.

Apesar de ser um dos métodos mais eficientes para determinar a raiz de uma equação, ele apresenta uma desvantagem pois necessita do conhecimento da função derivada para realizar os cálculos.

A Figura 2 é uma representação gráfica do método de Newton-Raphson, exemplificando as iterações a partir de um ponto inicial .

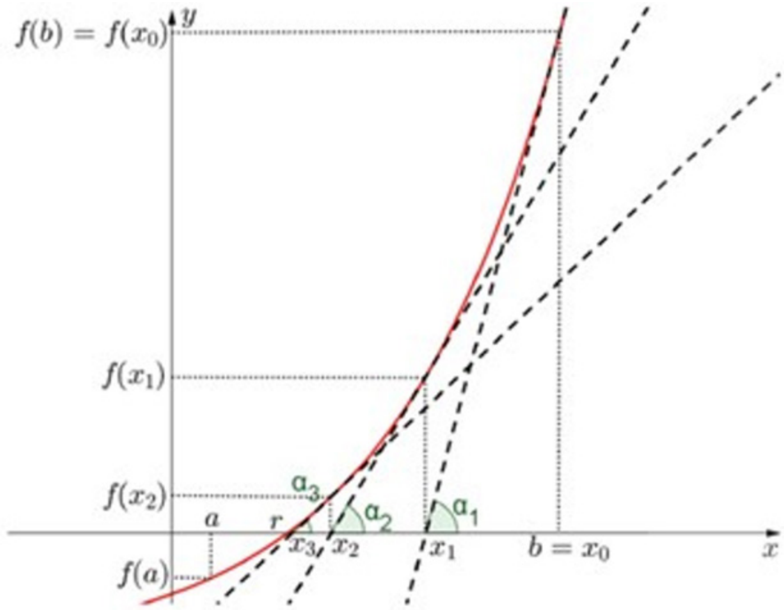

Figura 2. Representação gráfica do método de Newton-Raphson

Método da Secante

O método de Newton-Raphson possui uma desvantagem, a necessidade do conhecimento da equação derivada. Visando contornar essa limitação, o método da Secante substitui a derivada pela utilização das retas secantes da função. [Sá et al. 2022].

Utilizando a equação do quociente das diferenças

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} * f(x_k) - f(x_{x-1} * x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz. Observamos que são necessárias duas aproximações para iniciar o método.

A partir de duas aproximações x_k e x_{k-1} , o ponto x_{k+1} é obtido como sendo a abcissa do ponto de intersecção do eixo x e da reta secante que passa por $(x(_{k-1}),f(x(_{k-1})))$ e $(x_k,f(x_k)$

A Figura 3 é uma representação gráfica do funcionamento do método da Secante:

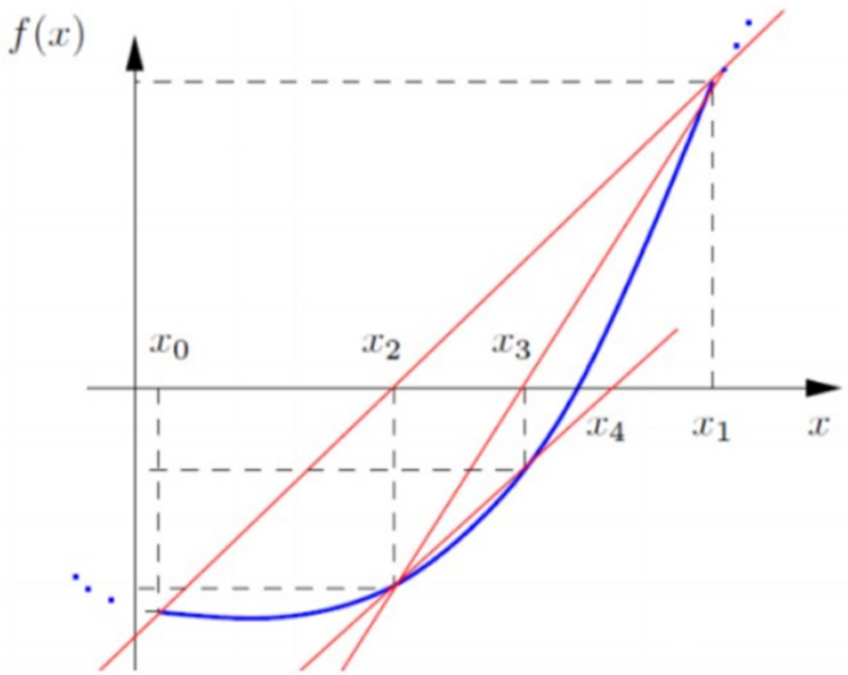

Figura 3. Representação gráfica do método da Secante

Método da Falsa Posição

Segundo Andrade "O método da falsa posição pode ser considerado uma variação do método da bisseção ou uma variação do método das secantes" [sd, p. 1].

Buscando acelerar o método da Bisseção, é selecionado um ponto que esteja mais próximo da raiz, para tal, é considerado como aproximação inicial c para a raiz, a média ponderada entre e com pesos e , respectivamente. [Andrade sd].

$$c = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

Visto que com pesos e possuem mais sinais opostos.

"Pode ser considerado como variação do método das secantes, pois notamos que equação é igual àquela obtida pelo método das secantes. A diferença entre os métodos está na escolha de subintervalos, que não existe no método das secantes." [Andrade sd, p. 2].

É possível simplificar a equação

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

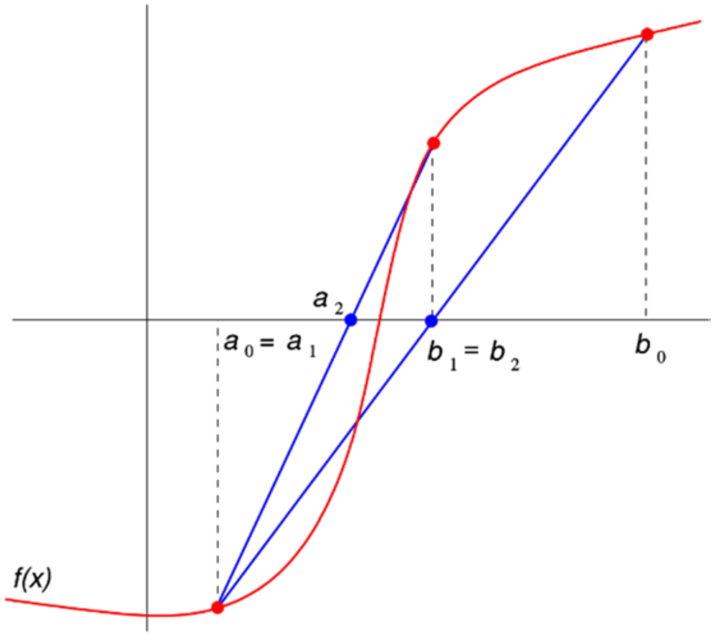

Figura 4. Representação gráfica da Falsa Posição

Método do Ponto Fixo

Segundo [Ruggiero e Lopes 1997], O método do Ponto Fixo consiste em transformar a equação em uma equação equivalente a e a partir de uma aproximação inicial gerar uma sequência de aproximações para pela relação é tal que se, somente se . A função é chamada função de iteração para a equação.

Para Barros, a convergência desse método tende a se fechar em torno de um ponto. Graficamente, a raiz da equação é a abscissa do ponto de intersecção da reta e da curva [Barros 2023], como mostra a figura 5.

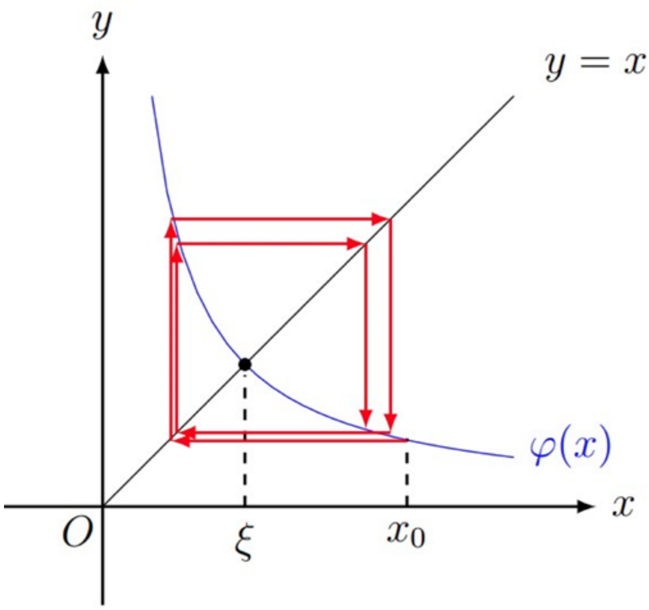

Figura 5. Representação gráfica do Ponto Fixo convergindo em um ponto

Contudo, há casos em que a função de iteração escolhida gere uma sequência que diverge, e consequentemente, não convirja para o zero da função, como indica a Figura 6.

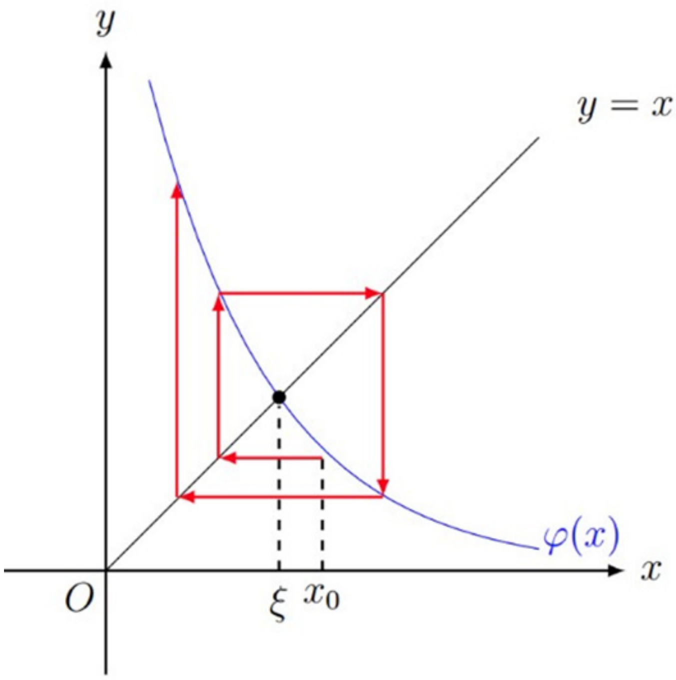

Figura 6. Representação gráfica do ponto fixo divergindo em um ponto

A função de iteração converge se e diverge se for .

3. Metodologia

Para o desenvolvimento do aplicativo, foi realizada a coleta de algumas informações necessárias para o processamento dos dados pelos métodos. Informações relevantes para cada método, além das comuns entre eles, como sendo a equação a ser processada, o número máximo de iteração de cada método e sendo o valor de precisão esperado.

Os outros dados específicos de cada método, apresentados na Tabela 1.

Método	Variáveis Comuns	Variáveis Específicas
Bisseção	f(x),N,p	a,b
Secante	f(x),N,p	a,b
Falsa Posição	f(x),N,p	a,b
Newton-Raphson	f(x),N,p	f'(x),c

Ponto Fixo	f(x),N,p	g(x),a

Tabela 1. Variáveis necessárias para os métodos

Os métodos da bisseção, secante e Falsa posição utilizam as variáveis a e b, sendo Ponto Inicial e Ponto Final respectivamente.

O método de Newton-Raphson utiliza as variáveis f'(x) e c , sendo a função derivada da função e chute inicial, respectivamente.

O método do Ponto fixo utiliza duas variáveis, sendo a variável g(x) um chute inicial para o início do método, e a variável que é uma função de iteração.

3.1 Tecnologias Utilizadas

Após a aquisição dos métodos na fase de pesquisa, o desenvolvimento do aplicativo foi realizado utilizando o framework Flutter[3] na versão 3.16. A escolha deste framework para a implementação do aplicativo se deu pelo fato de ele ter um foco em desenvolvimento multiplataforma para dispositivos móveis.

Flutter é uma ferramenta para desenvolver aplicativos em diferentes plataformas simultaneamente, utilizando apenas um único código. Isso garante versatilidade, uma curva de aprendizado mais suave e agilidade.

Por se tratar de um aplicativo para dispositivos móveis, o desenvolvimento deve se concentrar em uma plataforma alvo. Atualmente, as duas plataformas líderes no mercado de dispositivos móveis são Android e iOS, com uma fatia de mercado de 69.67% e 29.64%, respectivamente. (Figura 7)

3 kit de desenvolvimento de software de interface de usuário.

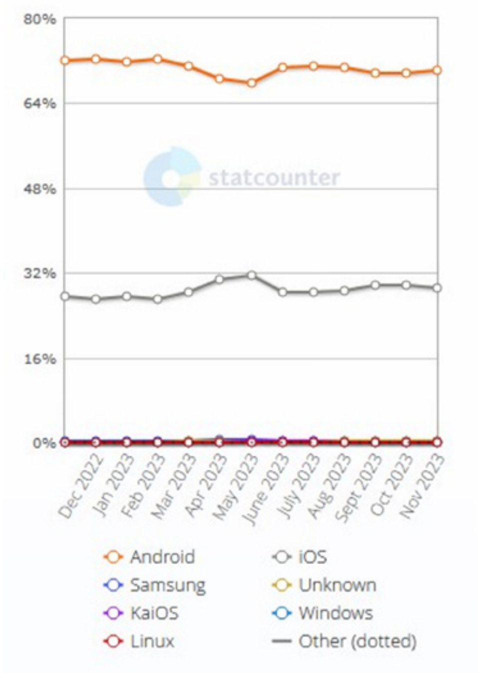

Figura 7. Participação no mercado de sistemas operacionais móveis em todo o mundo

Além da autonomia, outro ponto relevante para a implementação direta no aplicativo é o ganho de performance, visto que não há necessidade de esperar pela resposta dos cálculos.

Outra tecnologia utilizada para a plotagem dos gráficos foi a biblioteca Flutter Charts, uma biblioteca de visualização de dados escrita em Dart, a linguagem utilizada pelo Flutter, para criação de gráficos interativos, animados e de alta performance e qualidade para aplicativos móveis.

Por fim, foi utilizada uma biblioteca para realização dos cálculos matemáticos, a biblioteca Math Expressions. Com ela, é possível avaliar as expressões matemáticas inseridas pelo usuário, realizando a conversão automática do formato de string para uma expressão matemática calculável.

3.2 Pseudocódigo

Após a coleta das variáveis necessárias para a realização dos métodos, foi realizada uma pesquisa sobre os algoritmos que implementam os métodos numéricos. Os pseudocódigos utilizados são uma adaptação de [Ruggiero e Lopes 1997] para atender às necessidades específicas deste projeto.

Os algoritmos retornam uma lista com as raízes encontradas. Após encontrar uma raiz, o algoritmo atualiza o intervalo inicial e reinicia o processo de busca pela raiz neste novo intervalo, parando a execução somente quando o número máximo de iterações é atingido.

Após a coleta dos dados iniciais, os algoritmos inicializam as variáveis necessárias para o processamento dos dados e então iniciam o bloco while que executa os comandos até que se atinja o critério de parada.

Um dos comandos dentro do bloco while é o bloco de comando if, que realiza uma comparação para avaliar se o valor atual de é a raiz. Caso seja, ele é adicionado à lista de raízes, que será retornada ao final do algoritmo.

O algoritmo da Bisseção, mostrado na Figura 8, recebe os dados da equação, intervalo, número de repetições e a precisão. Após a inicialização das variáveis, inicia-se o processo iterativo dentro do bloco while. O laço de repetição while possui um comando de parada que é verificado a cada iteração.

A variável é atualizada como sendo o ponto médio entre os pontos e , então é verificado se é a raiz ou se o critério de parada é atingido. Caso uma das validações seja verdadeira, é considerado como raiz e é adicionado à lista de raízes. Caso contrário, um dos extremos do intervalo é atualizado e iniciado uma nova iteração.

```
Algoritmo 1: Pseudocódigo do Método da Bisseção - Adaptação
  Data: equação linear f(x), intervalo [A, B], nrº máximo de iterações N, precisão
        do método p
  Result: Lista contendo as raizes encontradas[x1, x2, ..., xn]
  i ← 0;
  a ← A;
  b ← B;
  inicializa lista raizes;
  while i < N e (a < B − 1 ou b < A − 1) do
  |  x ← (a + b)/2;
  |  if f(x) = 0 ou (b − a)/2 < p then
  |  |  raizes ← [x, fx] Adiciona o x à lista de raízes;
  |  |  a ← x + 0.1;
  |  |  b ← B;
  |  |  continue;
  |  end
  |  if f(a) * f(b) < 0 then
  |  |  b ← x;
  |  else
  |  |  a ← x;
  |  end
  |  i ← i + 1;
  end
  return raizes;
```

Figura 8. Pseudocódigo do Método da Bisseção - Adaptação

O algoritmo do método da Secante mostrado na Figura 9, recebe os dados da equação, intervalo, número de repetições e a precisão. Após a inicialização das variáveis inicia-se o processo iterativo dentro do bloco while.

São calculados os valores de e que são necessários para calcular o valor de , posteriormente é calculado que é utilizado na fórmula do critério de parada. Caso o critério de parada seja atingido, é tido então como raiz e é adicionado na lista de raízes e então é encerrado o loop while. Caso contrário, os valores do intervalo são atualizados e é iniciado uma nova iteração.

```
Algoritmo 2: Pseudocódigo do Método da Secante - Adaptação
  Data: equação f(x), pontos inicial e final A, B, nrº máximo de iterações N,
        precisão do método p
  Result: Lista contendo a raiz encontrada [x, f(x)]
  i ← 0;
  a ← A;
  b ← B;
  inicializa lista raiz;
  while i < N do
  |  fa ← f(a);
  |  fb ← f(b);
  |  x ← ((b * fa) − (a * fb))/(fa − fb);
  |  fx ← |(x − a)/x|;
  |  if fx < p then
  |  |  raiz ← [x, fx] Adiciona o x à lista de raízes;
  |  |  pare;
  |  end
  |  b ← a;
  |  a ← x;
  |  i ← i + 1;
  end
  return raiz;
```

Figura 9. Pseudocódigo do Método da Secante – Adaptação

O algoritmo do método da Falsa Posição mostrado na Figura 10, recebe os dados da equação, intervalo, número de repetições e a precisão. Após a inicialização das variáveis inicia-se o processo iterativo dentro do bloco while.

É criado uma variável para guardar o valor anterior de e então são calculados os valores de e , após realizar os cálculos, os valores dos limites do intervalo são atualizados de acordo com a verificação da localização da raiz. Então é verificado se o critério de parada do método é atingido.

Caso seja atingido, é tido como raiz e é adicionado à lista de raízes e o loop é encerrado. Caso contrário, uma nova iteração é iniciada.

```
Algoritmo 3: Pseudocódigo do Método da Falsa Posição - Adaptação
  Data: equação f(x), pontos inicial e final A, B, nrº máximo de iterações N,
        precisão do método p
  Result: Lista contendo a raiz encontrada [x, f(x)]
  i ← 0;
  x ← A;
  a ← A;
  b ← B;
  inicializa lista raiz;
  while i < N do
  |  x0 ← x;
  |  fa ← f(a);
  |  fb ← f(b);
  |  x ← a − (fa * (b − a)/(fb − fa));
  |  fx ← f(x);
  |  if fx * fa < 0 then
  |  |  b ← x;
  |  else
  |  |  a ← x;
  |  end
  |  if (|(x - x0)| / |x|) < 0 then
  |  |  raiz ← [x, fx] Adiciona o x à lista de raízes;
  |  |  pare;
  |  end
  |  i ← i + 1;
  end
  return raiz;
```

Figura 10. Pseudocódigo do Método da Falsa Posição – Adaptação

O algoritmo do método de Newton-Raphson mostrado na Figura 11, recebe os dados da equação, equação derivada, chute inicial, número de repetições e a precisão. Após a inicialização das variáveis inicia-se o processo iterativo dentro do bloco while.

São calculados os valores de   e , é feita uma validação para verificar se , caso seja, a variável , recebe o valor de   subtraído de 1, isso previne uma divisão por 0. Caso contrário, a variável recebe então a diferença de pela razão de .

Após realizar os cálculos, é verificado se o critério de parada do método é atingido. Caso seja atingido, é tido como raiz e é adicionado à lista de raízes e o loop é encerrado. Caso contrário, é atualizado e uma nova iteração é iniciada.

```
Algoritmo 4: Pseudocódigo do Método de Newton-Raphson - Adaptação
  Data: equação f(x), equação derivada f'(x) , chute inicial c, nrº máximo de
        iterações N, precisão do método p
  Result: Lista contendo a raiz encontrada [x, f(x)]
  i ← 0;
  x_ant ← A;
  x_i ← 0;
  inicializa lista raiz;
  while i < N do
    fx ← f(x_ant);
    dfx ← f'(x_ant);
    if dfx = 0 then
      x_i ← x_ant − 1 Previne a divisão por 0;
    else
      x_i ← x_ant − (fx/dfx);
    end
    if |(x_i − x_ant)| < p ou |x_i − x_ant| = 0 then
      raiz ← [x_i, fx] Adiciona o x à lista de raízes;
      pare;
    end
    x_ant ← x_i;
    i ← i + 1;
  end
  return raiz;
```

Figura 11. Pseudocódigo do Método de Newton-Raphson – Adaptação

O algoritmo do método do Ponto Fixo mostrado na Figura 12, recebe os dados da equação, uma função de iteração, chute inicial, número de repetições e a precisão. Após a inicialização das variáveis inicia-se o processo iterativo dentro do bloco while.

O valor de é calculado a partir da função de iteração , então é verificado se o critério de parada do método é atingido. Caso seja atingido, é tido como raiz e é adicionado à lista de raízes e o loop é encerrado. Caso contrário, é atualizado e uma nova iteração é iniciada.

```
Algoritmo 5: Pseudocódigo do Método do Ponto Fixo - Adaptação
  Data: equação f(x), função de iteração g(x), chute inicial A, nrº máximo de
        iterações N, precisão do método p
  Result: Lista contendo a raiz encontrada [x, f(x)]
  x_anterior ← A;
  i ← 0;
  inicializa lista raiz;
  while i < N do
    x ← g(x_anterior);
    if abs(x − x_anterior) < p then
      raiz ← [x_anterior, g(x_anterior)] Adiciona o x à lista de raízes;
      pare;
    end
    x_anterior ← x;
    i ← i + 1;
  end
  return raiz;
```

Figura 12. Pseudocódigo do Método do Ponto Fixo – Adaptação

4. Resultados e Discussões

Buscando reduzir o baixo índice de aprendizado nas turmas de cálculo numérico e aproveitando o fato de que os alunos têm acesso a smartphones, o desenvolvimento deste trabalho resultou na criação de um aplicativo móvel para auxiliar o ensino de zero de funções. O aplicativo recebe os parâmetros iniciais necessários para a realização dos cálculos referentes aos métodos selecionados e retorna as raízes, caso existam naquele intervalo, além de um gráfico interativo para uma melhor compreensão. A seguir, discutiremos os tópicos relacionados aos resultados obtidos durante o desenvolvimento deste aplicativo.

4.1 Interface do Aplicativo

O desenvolvimento da interface da aplicação utiliza os conceitos abordados pela Interface Homem-Computador. A usabilidade é a capacidade do produto de software de ser compreendido, aprendido, operado e atrativo para o usuário, sob condições especificadas. [Associação Brasileira de Normas e Técnicas 2003].

Todas as telas do aplicativo buscam atingir as metas de usabilidade que asseguram que os produtos serão fáceis de usar, sendo tais metas:

- Eficiência: Tempo necessário para a conclusão de uma atividade com apoio computacional;
- Segurança: Grau de proteção de um sistema contra condições desfavoráveis ou perigosas aos usuários;
- Learnability: Tempo e esforço necessário para que o usuário aprenda a utilizar o sistema; e
- Memorability: Esforço cognitivo necessário para lembrar como interagir com a interface;

A primeira tela (Figura 13), a tela inicial possui um título “Zero de Funções” e um botão “Exibir gráfico da Equação” que tem a função de redirecionar o usuário para a terceira tela (Figura 15) onde ele poderá visualizar o gráfico de uma equação.

Também está presente um botão de ajuda “O que é?” que redireciona o usuário para uma tela com mais informações sobre os métodos numéricos. (Figura 14).

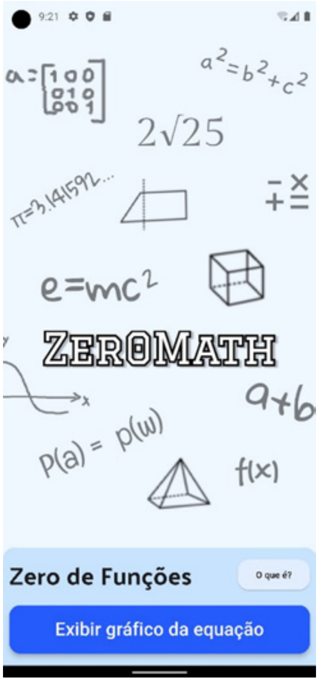

Figura 13. Tela inicial da aplicação

A segunda tela (Figura 14), é a tela de informações, sua implementação é importante pois exibe mais informações sobre os métodos numéricos e aborda a execução do passo a passo para a execução correta dos métodos. Tais informações permitem o aprendizado autônomo dos discentes, uma vez que exemplifica o passo a passo da execução dos métodos de zero de funções, de maneira clara e inteligível, aumentando a capacidade do discente de compreender o conteúdo.

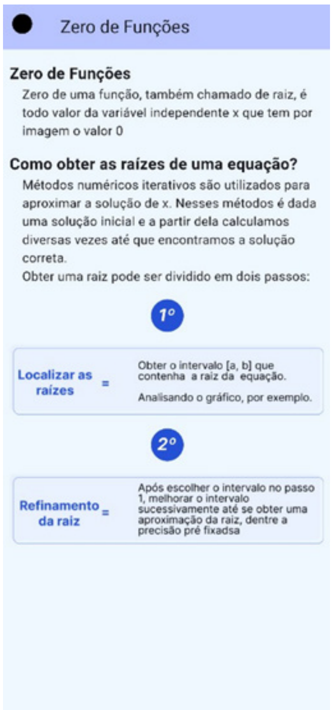

Figura 14. Tela Informações sobre os métodos numéricos

A terceira tela (Figura 15), é a tela para exibição do gráfico de uma equação. Essa exibição é importante para auxiliar no processo de análise referente à obtenção das raízes de uma equação. Desse modo, ao analisar o gráfico, o usuário poderá definir o intervalo que contenha pelo menos uma raiz e então seguir para a etapa de refinamento da raiz.

Esta tela contém 4 componentes principais, um campo de texto, um botão acima do campo de texto e dois botões na parte inferior da tela. O campo de texto, é uma área onde o usuário poderá inserir a equação a ser avaliada pelos métodos numéricos. O botão acima do campo de texto, tem como funcionalidade aplicar um modelo de equação, caso o usuário necessite de um modelo de equação matemática.

Os dois botões na parte inferior da tela, o primeiro “Exibir o gráfico da função” tem como funcionalidade gerar e exibir ao usuário o gráfico da equação inserida no campo de texto. Assim o usuário poderá avaliar o gráfico e extrair informações importantes como o intervalo inicial para a execução dos métodos. O segundo botão “Aplicar os métodos” redireciona o usuário para a quarta tela do aplicativo, onde ele poderá decidir qual método irá aplicar a equação e os dados iniciais.

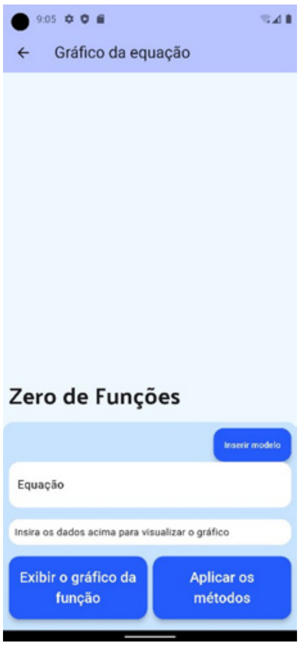

Figura 15. Tela para exibir o gráfico de uma equação

A quarta tela (Figura 16), é a tela Métodos, nesta tela o usuário conta com 5 botões, que têm como funcionalidade redirecionar o usuário para a tela a qual poderá inserir a equação e os dados referentes ao método selecionado pelo usuário. (Figura 17).

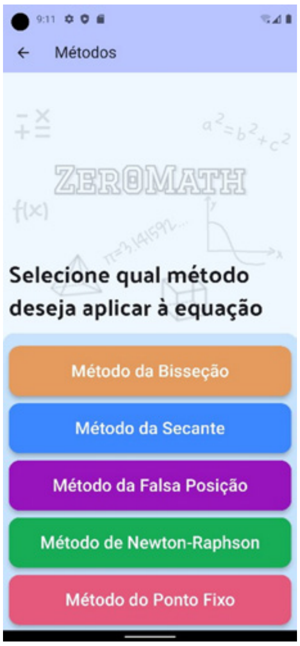

Figura 16. Tela métodos

A quinta tela (Figura 17), é a tela do Método específico. Nela o usuário irá de fato executar o método selecionado na tela anterior e visualizar os resultados de forma mais interativa. Esta tela é composta por campos de texto e um botão principal para realizar o cálculo do método. Os campos de texto, são áreas em que o usuário poderá inserir os dados necessários para o tipo de método selecionado.

O botão “Calcular” obtém os dados inseridos e inicia o cálculo do método, após a realização do cálculo será exibido um gráfico contendo as raízes, caso haja, e aparece um botão de informação “Exibir passo a passo” que redireciona a uma tela de detalhes da função. (Figura 18)

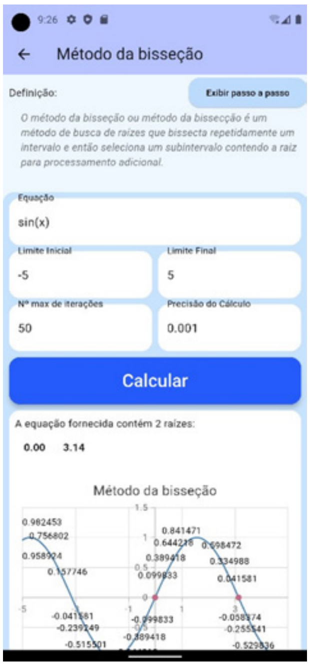

Figura 17. Tela método – Tela exibindo os dados e o gráfico da função e suas raízes

A última tela é a tela de Detalhes da Função (Figura 18), nela o usuário tem uma explicação mais detalhada sobre o método, uma tabela contendo os passos realizados pela execução do método e um gráfico informando os valores de . Esta tela serve como uma seção informativa e elucidativa, oferecendo explicações detalhadas, passos realizados e representações visuais que ajudam os alunos a compreenderem melhor o conteúdo ensinado. Esses elementos são essenciais para facilitar a aprendizagem e reforçar o entendimento do assunto abordado. Segundo Lovis “os tutoriais ensinam e controlam o processo da aprendizagem. É a forma tecnológica de dar ao aluno um tutor individual que é paciente e adequado às necessidades do aluno”. [Lovis et al. 2007, p. 12]

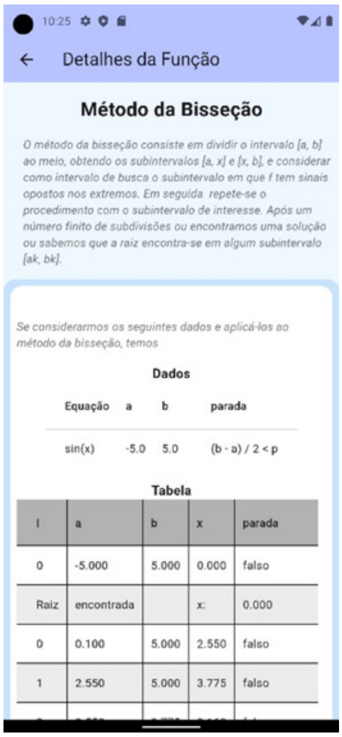

Figura 18. Tela detalhes da função

4.2 Funcionalidades

As principais funcionalidades do aplicativo são, encontrar uma ou mais raízes na equação e exibir um gráfico. Após a execução do método escolhido pelo usuário, existe a possibilidade de o aplicativo encontrar nenhuma, uma ou mais de uma raiz, dado a equação e os dados iniciais inseridos. A precisão utilizada no cálculo, e o número de iterações interfere no resultado, pois, caso a precisão seja muito pequena é possível que o método nunca encontre a raiz pela possibilidade de expressar números muito pequenos (Figura 19).

Caso o número máximo de iterações não seja o suficiente, pode acontecer de o método terminar antes de atingir o mínimo de iterações necessárias para que seja encontrada uma raiz presente na equação (Figura 20).

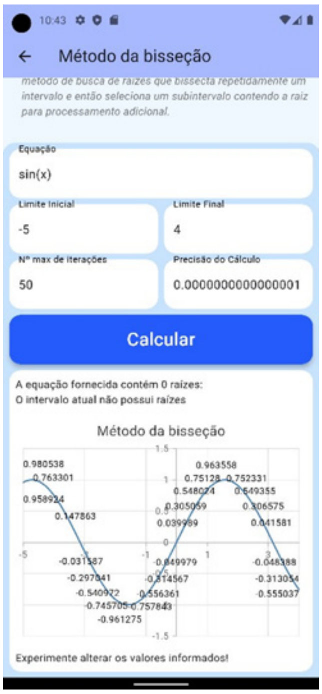

Figura 19. Precisão muito pequena

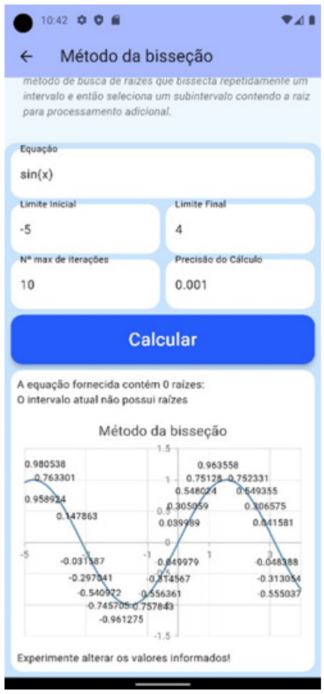

Figura 20. Número máximo de iteração baixo.

O gráfico exibe a equação aplicada ao limite e informa os pontos em que corresponde à zero, ou seja, os pontos em que a raiz é encontrada. O gráfico tem como funcionalidade a interatividade do usuário, o usuário tem a possibilidade de mover pelos eixos e do plano cartesiano, aproximar o plano para analisar os pontos do gráfico de maneira mais precisa (Figura 21) e tem a possibilidade de, ao clicar em um ponto da curva, ter a informação da posição daquele ponto no plano (Figura 22).

Figura 21. Zoom Aplicado

Figura 22. Informação de um ponto no plano cartesiano

Os resultados obtidos por [Valadares et al. 2016] apresentam uma comparação detalhada do tempo de execução e do custo computacional gerado por cada método abordado no artigo. Em contraste, o trabalho de [Sá et al. 2022] implementa apenas três métodos para encontrar os zeros de funções. Já [Paulista et al. 2018] não só propõe a exibição dos resultados dos cálculos, mas também detalha o passo a passo da resolução. Este trabalho, por sua vez, vai além de uma simples comparação: implementa todos os cinco métodos, exibe os resultados, apresenta o gráfico da equação e descreve detalhadamente cada etapa do processo.

Os resultados obtidos com o uso do aplicativo mostram uma clara vantagem em termos de interatividade e compreensão dos métodos numéricos. A visualização gráfica permite aos alunos uma compreensão mais intuitiva dos processos envolvidos. A exibição dos gráficos é feita de maneira interativa permitindo a exploração de dados de maneira mais detalhada além da interpretação aprimorada que ajuda a entender melhor os dados fornecendo informações adicionais ao visualizar os pontos.

O uso do aplicativo no ensino de Cálculo Numérico tem implicações práticas significativas, como o aumento da autonomia dos alunos e a facilidade de acesso a ferramentas de aprendizagem interativas. Futuras pesquisas podem focar na ampliação das funcionalidades do aplicativo, como a inclusão de suporte para funções definidas por partes e a otimização do desempenho em dispositivos menos potentes. Além disso, explorar a integração do aplicativo com outras ferramentas educacionais e plataformas de aprendizado pode aumentar ainda mais seu impacto no ensino de métodos numéricos.

Em resumo, o aplicativo apresenta diversas vantagens, como acessibilidade, interatividade e apoio ao aprendizado autônomo. A interface simples e clara garante uma maior interpretação dos dados exibidos ao usuário, facilitando a aprendizagem durante as aulas e viabilizando a autonomia no processo de aprendizado. A não necessidade de conexão com a internet, permite que mais alunos tenham à disposição mais uma ferramenta para o aprendizado nas turmas de Cálculo Numérico.

5. Considerações Finais

Com o desenvolvimento do aplicativo móvel "ZeroMath" para auxiliar no ensino dos métodos numéricos, foi possível criar uma solução tecnológica voltada para o aprendizado dos métodos de funções, oferecendo uma ferramenta de apoio para aqueles que desejam aprender. Espera-se que essa inovação torne o ensino e a aprendizagem da matemática no ensino superior mais acessível e prática para as pessoas. Com o aplicativo instalado no celular, os usuários podem realizar, avaliar e interpretar os resultados apresentados, tornando-se mais participativos durante as aulas. O "ZeroMath" permite realizar cálculos numéricos relacionados a funções matemáticas, como encontrar raízes de equações, por meio dos métodos numéricos disponíveis na aplicação. Além disso, oferece suporte ao aprendizado ao exibir o passo a passo da resolução e os gráficos correspondentes, permitindo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos.

Os resultados obtidos corroboram uma execução bem-sucedida e alcançaram o objetivo principal, uma vez que a aplicação implementa todos os métodos propostos e realiza as funcionalidades estabelecidas neste trabalho. Isso tem auxiliado no entendimento e tornado o processo de aprendizagem mais dinâmico. Para pesquisas futuras, o aplicativo “ZeroMath” pode ser explorado de várias maneiras. Uma possível linha de pesquisa seria investigar a eficácia do aplicativo no ensino e aprendizagem dos métodos numéricos, comparando o desempenho dos alunos que utilizam o aplicativo com aqueles que utilizam métodos tradicionais de ensino. Além disso, poderiam ser realizados estudos sobre a usabilidade e a satisfação dos usuários com o aplicativo, visando identificar possíveis melhorias e ajustes a serem feitos. Outra área de pesquisa interessante seria explorar a adaptação do aplicativo para diferentes contextos educacionais e níveis de ensino, buscando expandir seu alcance e impacto na educação.

A ferramenta foi disponibilizada na plataforma móvel Android e está disponível para download nos celulares por meio da loja de aplicativos Play Store.

6. Referências

Andrade, D. (sd). O método da Falsa Posição. pp. 5-4.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. (2003). Normas ABNT de Engenharia de software – Qualidade de produto – Parte 1: Modelo de qualidade. Rio de Janeiro. NBR ISO/IEC 9126-1.

Barros, D. F. S. (2023). Soluções de equações com uma variável: método da bissecção e iteração pelo método do ponto fixo.

Boeira, J. M., Balzan, F. P., & Weingärtner, T. S. (2014). Recursos tecnológicos na educação: Potencializando pedagogos para o uso da tecnologia na prática educativa. Competência – Revista da Educação Superior do Senac-RS, 4(1).

CETIC. (2023). Pesquisa TIC Domicílios 2022. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/20230825143348/resumo_executivo_tic_domicilios_2022.pdf.

Costa, P. T., & Silva, L. S. (2009). Métodos numéricos para zeros de funções.

Brasil Escola. (sd). A qualidade da educação brasileira. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/trabalho-docente/a-qualidade-educacao-brasileira.htm.

Lovis, K. A., et al. (2007). Atividade envolvendo tipos de softwares educacionais.

Marinho, J. S. (2022). O uso do Winplot como software educativo no ensino da função quadrática. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/22/o-uso-do-winplot-como-software-educativo-no-ensino-da-funcao-quadratica.

Masola, W., & Allevato, N. (2019). Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. Educação Matemática Debate, 3(7), pp. 52-67. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/78.

Noé, M. (2019). A Importância dos Recursos Tecnológicos no Ensino da Matemática. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/a-importancia-dos-recursos-tecnologicos-no-ensino-.htm.

Pacheco, J. A., & Barros, J. V. (2013). O uso de softwares educativos no ensino de matemática. Revista Diálogos, 8, pp. 5-13.

Paulista, C. R., et al. (2018). Desenvolvimento de software para solução numérica de equações polinomiais: uma abordagem interdisciplinar. Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão, 3(2).

Resende, G., & Mesquita, M. da G. B. F. (2013). Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de Matemática em escolas do município de Divinópolis (MG). Educação Matemática Pesquisa, 15(1), pp. 199-222.

Ribeiro, R. R. J., Menezes, M. da S., & Mezzomo, I. (2012). Métodos numéricos para aproximação de raízes de funções. CMAC, pp. 2317-3297.

Ruggiero, M. A. G., & Lopes, V. L. da R. (1997). Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. Makron Books do Brasil.

Sobral, E. da S. (2021). Uma abordagem sobre métodos numéricos para determinar as raízes de funções polinomiais para alunos do ensino médio. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/26296.

Sá, G. C. B., Epifânio, M. A. B., & Silva, G. S. B. (2022). Desenvolvimento de uma ferramenta para auxílio do ensino-aprendizagem dos métodos numéricos. Informática na Educação, teoria & prática, 25, pp. 61-73.

Souza, M. E. do P. (2009). Família/escola: a importância dessa relação no desempenho escolar. Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), Paraná, pp. 1764-1768.

Tokarnia, M. (2023). Redes de ensino buscam caminhos para uso de tecnologia nas escolas. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-08/redes-de-ensino-buscam-caminhos-para-o-uso-de-tecnologia-nas-escolas.

Valadares, D. C. G., et al. (2016). Comparação de métodos iterativos de resolução de equações não lineares implementados no octave. In I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia.

Vieira, D. de O. L., & Drigo, M. O. (2021). Dificuldades de ensino e aprendizagem em matemática no ensino superior na perspectiva de docentes e discentes. Série-Estudos, 26(58), pp. 323-340.