

CADEIA DE MARKOV MULTIVARIADA APLICADA NA BOLSA DE VALORES UTILIZANDO DADOS DA PETROBRÁS, DÓLAR E PETRÓLEO WTI

MULTIVARIATE MARKOV CHAIN APPLIED IN DATA ANALYSIS OF PETROBRAS, DOLLAR AND PETROLEUM WTI

MATEUS MÜLLER FRANCO

Especialista em Engenharia Industrial pela Universidade de Caxias do Sul (UCS). E-mail: mmfranco1@ucs.br

RAFAELA BOEIRA CECHEIN

Mestre em Engenharia Industrial pela Universidade de Caxias do Sul (UCS). E-mail: rbcechin@ucs.br

MÔNICA PASOLINI

Especialista em Gestão de Pessoas pela Universidade de Caxias do Sul (UCS). E-mail: mpasolini@ucs.br

AMANDA DALLA ROSA MONEGAT

Engenheira de Produção pela Universidade de Caxias do Sul (UCS). E-mail: adrmonegat@ucs.br

LEANDRO LUIS CORSO

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Pós-doutor em Engenharias pela Monash University e U.S. Naval Postgraduate School. Docente na Universidade de Caxias do Sul (UCS). E-mail: llcorso@ucs.br

Endereço: Rua Francisco Getúlio Vargas, 1130 - Caxias do Sul – RS, CEP 95070-560

Resumo: A aplicação de recursos em ações é uma forma de investimento em renda variável que possui um maior risco, sendo necessário realizar uma avaliação financeira, de modo a quantificar o valor presente e a expectativa de geração de ganhos futuros. Neste sentido, o trabalho apresenta uma proposta de cálculo da probabilidade de variação do preço de ação da Petrobrás com o dólar e com o petróleo WTI, utilizando Cadeia de Markov Multivariável. Os dados utilizados para a aplicação do método adotado são referentes aos históricos dos preços de ações e índices, negociados na Bolsa de Valores de São Paulo e de Nova Iorque. Para atingir o objetivo proposto, a metodologia foi dividida em coleta dos dados, elaboração da matriz de transição, análise dos cenários e aplicação da Cadeia de Markov Multivariada. Como resultado desta pesquisa, constatou-se por meio das análises de cenários, que o intervalo com maior concentração de probabilidade de estado estável é entre -1,5% a 1,5% para as duas hipóteses calculadas. Para o cenário de Petrobras e dólar, o tempo de recorrência ficou em 2,8 dias, enquanto para Petrobras e petróleo WTI foi de 3,7 dias.

Palavras-chave: Cadeia de Markov Multivariada, Bolsa de Valores, Petrobras, Investimento.

Abstract: The application of resources in shares is a form of investment in variable income that has a greater risk, being necessary to make a financial evaluation, in order to quantify the present value and the expectation of generation of future gains. In this sense, this paper presents a proposal to calculate the probability of variation of Petrobras share price with the US dollar and WTI oil, using the Multivariate Markov Chain. The data used for the application of the adopted method are related to historical stock and index prices, traded on the São Paulo Stock Exchange and New York Stock Exchange. In order to reach the proposed objective, the methodology was divided into data collection, elaboration of the transition matrix, analysis of the scenarios and application of the Multivariate Markov Chain. As a result of this research, it was verified through the scenario analysis that the interval with the highest concentration of probability of steady state is between -1.5% and 1.5% for the two hypotheses calculated. For the Petrobras and dollar scenario, the time stood at 2.8 days, while for Petrobras and WTI oil it was 3.7 days.

Keywords: Multivariate Markov Chain, Stock Exchange, Petrobras, Investment.

1 INTRODUÇÃO

O crescimento e desenvolvimento do mercado de capitais estão diretamente ligados ao processo de desenvolvimento econômico de um país (SILVA, 2008). Como complemento, destaca-se que o acompanhamento das taxas de câmbio pode influir decisivamente em aspectos de grande reflexo para a condução das políticas macro e microeconômicas (RADICCHI, 2014).

O interesse pela previsão dos preços dos retornos das ações é tão antigo quanto os próprios mercados financeiros (FERSON; SARJISSIAN; SIMIN, 2008; CAVALHEIRO et al., 2010; MUNTASER; SILVA; PENEDO, 2017). Oliveira et al. (2017) e Fernandes, Fonseca e Iquiapaza (2018) destacam que a escolha do investimento dependerá da disposição ou aversão ao risco que cada investidor carrega consigo. A aplicação de recursos em ações é uma forma de investimento em renda variável que possui um maior risco. Portanto, para a tomada de decisão em relação ao investimento em ações e buscar minimizar os riscos de perdas, é necessário realizar a avaliação financeira, de modo a quantificar o valor presente com expectativa de ganhos futuros que determinada empresa possa gerar.

Mundialmente, Franco e Steiner (2014) destacam que o mercado de ações movimenta um grande volume financeiro. A capitalização das empresas por meio da emissão de ações é apresentada como uma interessante estratégia, não apenas em volume de negócios, como também na eficiência de suas alocações, fator esse que foi fundamental para o desenvolvimento econômico do Brasil (MUNTASER; SILVA; PENEDO, 2017). Wolf, Oliveira e Palludeto (2018) relatam que o mercado de ações esteve com desempenho favorável até 2008, entretanto, depois da crise internacional deste mesmo ano, apresentou forte contração. A partir de 2014, a crise econômica e social foi agravada pelo aprofundamento da crise política que prejudicaram este segmento no Brasil.

De acordo com D'Almeida (2015), as taxas de crescimento da demanda por petróleo tem aumentado de forma mais acentuada em relação ao crescimento populacional. O autor destaca que o petróleo lidera a matriz energética brasileira, possuindo 39,3%. Zhu e Singh (2016) relatam que o preço do petróleo bruto é um determinante significativo dos retornos do mercado de ações e que a volatilidade do preço do petróleo cria incertezas em relação à lucratividade da empresa, avaliações e decisões de investimento.

O conceito de Cadeia de Markov, que pertence à área de Pesquisa Operacional, é uma análise de um processo, em que o estado futuro depende unicamente de seu estado atual. Sasikumar e Abdullah (2017) destacam que a Cadeia de Markov é uma ferramenta essencial para modelagem prática de sistemas de filas, sistemas de manufatura e sequência de dados categóricos. Essa última pode ser utilizada em muitas aplicações, como controle de estoque, tratamento de dados e mercado financeiro. Sasikumar e Abdullah (2017) aplicaram a Cadeia de Markov Multivariada (CMM) para prever as variações mensais dos preços da gasolina e do diesel e as alterações mensais do preço do petróleo na Índia.

Ching, Ng e Fung (2008) fizeram um estudo aplicando o modelo das CMM de ordem superior. O modelo foi aplicado em uma empresa de refrigerantes da cidade de Hong Kong com o objetivo de prever a demanda de vendas e resolver o problema que a empresa estava enfrentando quanto aos estoques. Outro estudo foi feito por Yang et al. (2011) e utilizou o método da CMM de primeira ordem para gerar uma série de dados do tempo que envolve radiação solar, ar temperatura de bulbo seco e umidade absoluta com objetivo de avaliar o desempenho de sistemas de energias renováveis em edifícios de Hong Kong. Cechin e Corso (2019) aplicaram a técnica de CMM de ordem superior em análise do Ibovespa e Dow Jones, mostrando a relação entre os índices para as mesmas faixas de variações.

Portanto, o objetivo deste trabalho é calcular a probabilidade de variação de duas análises: preço da ação da Petrobrás com dólar e com petróleo WTI, utilizando CMM. Também foi estudado o comportamento destes cenários, para se obter o tempo de recorrência esperado, a fim de ser uma informação útil para investidores. Desta maneira, em termos teóricos, esse estudo pretende contribuir com a literatura sobre o efeito da aplicação de CMM na variação do preço de ação da Petrobrás com o dólar e com o petróleo WTI. Nesta pesquisa se constatou que ainda são escassos os estudos com foco no nível operacional, justificando-se, neste caso, por inovar sobre a temática tratada, que é ainda pouco abordada no cenário brasileiro. Já em termos práticos, a contribuição está referente aos benefícios práticos do direcionamento de esforços de investimentos e gerenciamento de riscos organizacionais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados os referenciais necessários para a compreensão das teorias adotadas neste trabalho.

2.1 VOLATILIDADE DO MERCADO FINANCEIRO

Conforme Maciel e Ballini (2017) e Chiu et al. (2018), os impactos macroeconômicos e a volatilidade do mercado financeiro estão intrinsecamente ligados. Neste cenário, é fundamental uma investigação mais apurada da capacidade dos agentes de precificarem derivativos em geral (MELLO, 2009). Os autores afirmam que fatores como magnitudes dos retornos dos ativos, velocidade de alta ou queda de preços, notícias internas ou externas, eventos relacionados a uma ação específica e expectativas em relação a um indicador a ser divulgado, podem afetar os preços das diversas ações e suas respectivas opções (MELLO, 2009).

Ishikawa (2008) expõe que o acompanhamento dos preços das ações tem por objetivo coletar informações que permitam avaliar os riscos de investimentos. De acordo com Mello (2009) e Yu e Meyer (2006), a tomada de decisão financeira leva em consideração a volatilidade de um ativo como uma medida de risco e a empregam como parâmetro para cálculo e precificação. Ishikawa (2008) complementa que o entendimento da volatilidade é fundamental, pois influencia na avaliação dos riscos de investimentos e no preço das ações. Yu e Meyer (2006) acrescentam que as volatilidades do mercado financeiro se movem juntas ao longo do tempo através dos ativos.

Para Mello (2009), a volatilidade é considerada uma medida de incerteza em relação a um determinado ativo. Nas séries financeiras, é comum observar o preço de uma determinada ação ou de uma determinada carteira de ações ao longo de um período de tempo (ISHIKAWA, 2008). Assim, muitos modelos de previsão calculam a volatilidade futura utilizando como base o comportamento dos ativos no passado (MELLO, 2009). Deste modo, a volatilidade implícita pode ser um indicador eficiente para previsão da volatilidade futura (MELLO, 2009). Almeida (2013), Ishikawa (2008) e Mello (2009) referenciam volatilidade como a variância condicional e não constante no tempo da série, e que pode ser definida como o desvio-padrão sobre os retornos de um ativo.

Conforme Almeida (2013), há uma dependência ao longo do tempo entre as volatilidades de diferentes ativos ou mercados de modo que em várias situações, torna-se preciso analisar várias séries conjuntamente, sendo natural utilizar uma abordagem multivariada. Neste sentido, o autor complementa que houve um grande avanço na modelagem multivariada de modelos de volatilidade, possibilitando decisões mais assertivas do ponto de vista financeiro.

2.2 CADEIA DE MARKOV

Um processo estocástico caracteriza-se por um conjunto de variáveis $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ estabelecidas em um determinado intervalo de tempo T (HILLIER; LIEBERMAN, 2005; HO; QUININO, 2012; ROSHAN; NASTOS, 2018). Conforme Taha (2008), para este tipo de processo, o estado do sistema X_t em cada ponto discreto do tempo ($t = 1, 2, 3, \dots$), é descrito por um valor x pertencente ao conjunto de dados.

De acordo com Almeida (2013) e Hillier e Lieberman (2005), um processo estocástico que possui propriedade Markoviana é uma Cadeia de Markov. Segundo os autores, este tipo de processo define-se pela probabilidade de ocorrência de um estado futuro depender apenas do estado presente. Deste modo, os estados anteriores não influenciam as experiências futuras. A probabilidade condicional P é apresentada por Andersen, Nielsen e Reinhardt (2017) e Hunter (2018) conforme Equações 1 e 2.

$$p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} \quad (1)$$

$$p_{ij}^n = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\} \quad (2)$$

Nas equações, p_{ij}^n é a probabilidade de que um processo passe do estado i para o estado j em n passos e X_t representa uma variável no tempo t . Staudt, Coelho e Gonçalves (2011), Ho e Quinino (2012), Andersen, Nielsen e Reinhardt (2017) e Roshan e Nastos (2018) corroboram que as probabilidades de transição podem ser representadas adequadamente pela notação matricial conforme mostrado pela Equação 3.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Os autores explicam que as probabilidades p_{ij} de que um processo inicialmente no estado i , no instante 0, esteja no estado j no instante t ocorre por meio do índice linha-coluna. Taha (2008) explica que o somatório das probabilidades de cada linha deve ser igual a 1 e pode ser representado por $\sum_{j=1}^N P_{ij} = 1$.

Para Souza (2010), as Cadeias de Markov podem ser representadas como um grafo direcionado, em que os vértices são os estados e as arestas são as probabilidades de transição entre esses estados. Assim, em uma Cadeia de Markov de ordem j , a probabilidade de o próximo evento ocorrer depende apenas dos j estados visitados anteriormente em um espaço de tempo discreto.

Segundo Staudt, Coelho e Gonçalves (2011), quando a probabilidade de um processo estar no estado j for constante e independente do estado inicial, então a Cadeia de Markov alcançou as probabilidades estacionárias de absorção. Conforme Hillier e Lieberman (2005), um processo Markoviano é capaz de ir de qualquer estado para outro atingiu a condição de regime estacionário e é descrito por uma matriz classificada como ergódica.

A probabilidade de estado estável π_j para uma Cadeia de Markov ergódica é representada pela Equação 4 e sua propriedade na Equação 5 (TAHA, 2008; HUNTER, 2018; ROSHAN; NASTOS, 2018):

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, \dots, M \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1 \quad (5)$$

Há $M + 2$ equações, $M + 1$ incógnitas e uma única solução. Assim, de acordo com Hillier e Lieberman (2005), é necessário excluir uma das equações, com exceção da Equação 5, pois $\pi_j = 0$ para qualquer j vai satisfazer as $M + 1$ equações.

Além disso, é possível analisar o tempo esperado de recorrência, representado por μ_{ii} . Ou seja, o número de transições até que o processo retorne para o estado inicial conforme mostrado na Equação 6 (TAHA, 2008).

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, M \quad (6)$$

2.2.1 Cadeias de Markov Multivariáveis

Conforme mencionado anteriormente, as probabilidades de transição estão associadas a várias mudanças de estado e o processo é descrito por uma matriz que representa as probabilidades de transição de um estado inicial para outro. Uma Cadeia de Markov Multivariada é usada quando há mais de uma série temporal de dados (HILLIER; LIEBERMAN, 2008; TAHA, 2008).

Uma Cadeia de Markov Multivariada de primeira ordem modela para um único passo no tempo, o comportamento de múltiplas séries temporais, podendo haver s sequências e m estados possíveis (CHING; NG; FUNG, 2008; CECHIN; CORSO, 2019). Desta forma, Ching, Ng e Fung (2008) explicam que a probabilidade do estado da sequência j no tempo $t = r + 1$ depende das probabilidades de estado de todas as sequências, incluindo a si mesma, no tempo $t = r$. O modelo multivariado de Cadeia de Markov de primeira ordem é representado pela equação 7 (YANG et al., 2011).

$$x_{r+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^s \lambda_{jk} P^{(jk)} x_r^{(k)}, \text{ para } r = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Onde, $x_0^{(j)}$ é a distribuição de probabilidade inicial da sequência j th, λ_{jk} é um número real não negativo, cuja soma é igual a 1 e $1 \leq j, k \leq s$.

A matriz de transição, $P^{(jk)}$ é uma distribuição de probabilidade de estados no tempo r na sequência k th para um passo no tempo, do estado no tempo t na sequência k para o estado no tempo $t + 1$ na sequência j th, e $x_r^{(k)}$. Desta forma, A probabilidade de estado da sequência j th, $x_{r+1}^{(j)}$ no tempo $r + 1$, depende da média ponderada de $P^{(jk)} x_r^{(k)}$ (CHING; NG; FUNG, 2008). A Equação 8 apresenta a forma matricial.

$$X_{r+1} = \begin{pmatrix} x_{r+1}^{(1)} \\ x_{r+1}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{r+1}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}P^{(11)} & \lambda_{12}P^{(12)} & \dots & \lambda_{1s}P^{(1s)} \\ \lambda_{21}P^{(21)} & \lambda_{22}P^{(22)} & \dots & \lambda_{2s}P^{(2s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1}P^{(s1)} & \lambda_{s2}P^{(s2)} & \dots & \lambda_{ss}P^{(ss)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r^{(1)} \\ x_r^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(s)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

3 MÉTODOS E RESULTADOS

Para atingir o objetivo proposto deste estudo, a metodologia foi dividida nas seguintes etapas: coleta dos dados, elaboração da matriz de transição, análise dos cenários, e aplicação da Cadeia de Markov Multivariada.

3.1 COLETA DE DADOS

Este artigo utilizou de dados históricos de preços de ações e índices, negociados na Bolsa de Valores de São Paulo e de Nova Iorque. Os dados foram coletados no endereço eletrônico do *Investing* Brasil e são referentes a dia-a-dia comercial. Foram utilizadas as seguintes informações: preço das ações da Petrobrás (PETR4), e cotação do dólar e do petróleo. Os dados do petróleo são referentes a *commodity* do WTI (*West Texas Intermediate*), que é negociada na Bolsa de Nova Iorque. Os demais dados utilizados são negociados na BM&FBovespa (Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo). Todas as informações são referentes de 1º de janeiro de 2017 a 31 de janeiro de 2020, e o Quadro 1 apresenta algumas particularidades da base de dados.

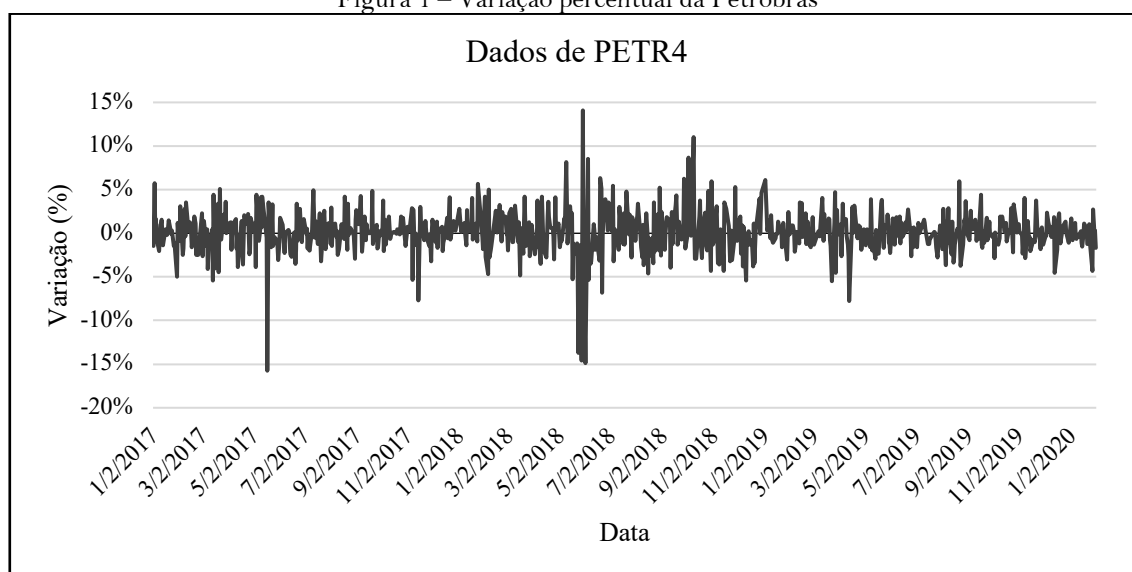
Quadro 1 – Informações sobre a base de dados

	PETR4	Dólar	Petróleo WTI
Qtd. de dados	671	671	671
Maior valor	R\$ 30,97	R\$ 4,28	\$76,41
Menor valor	R\$ 11,17	R\$ 3,06	\$42,53
Maior variação	14,08%	7,43%	14,68%
Menor variação	-15,75%	-5,08%	-7,30%

Fonte: Elaborado pelos autores.

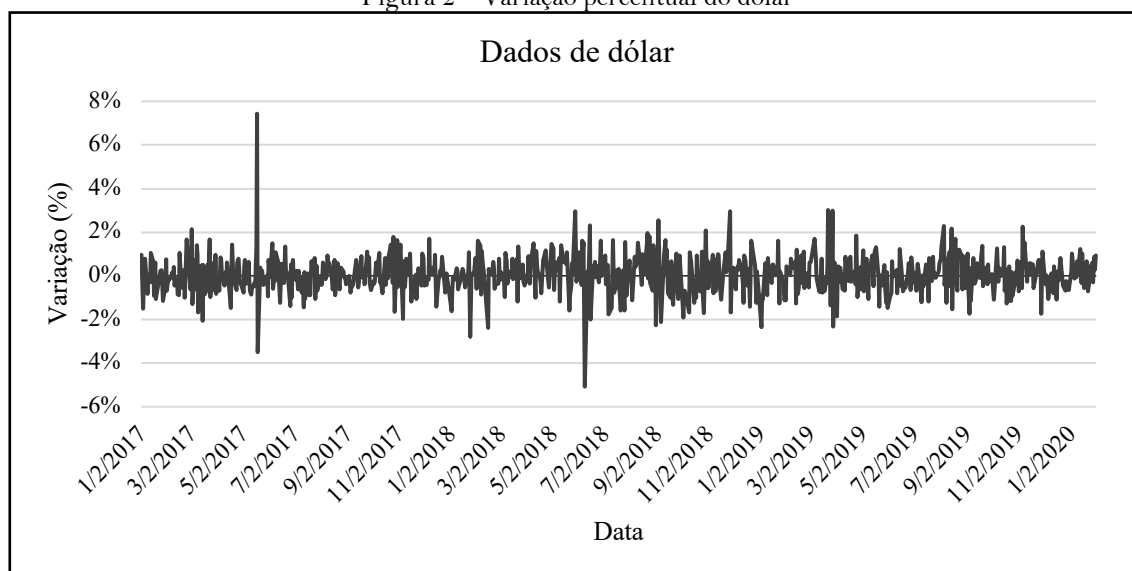
As Figuras 1, 2 e 3 mostram as variações percentuais para Petrobrás, dólar e petróleo WTI, respectivamente.

Figura 1 – Variação percentual da Petrobrás



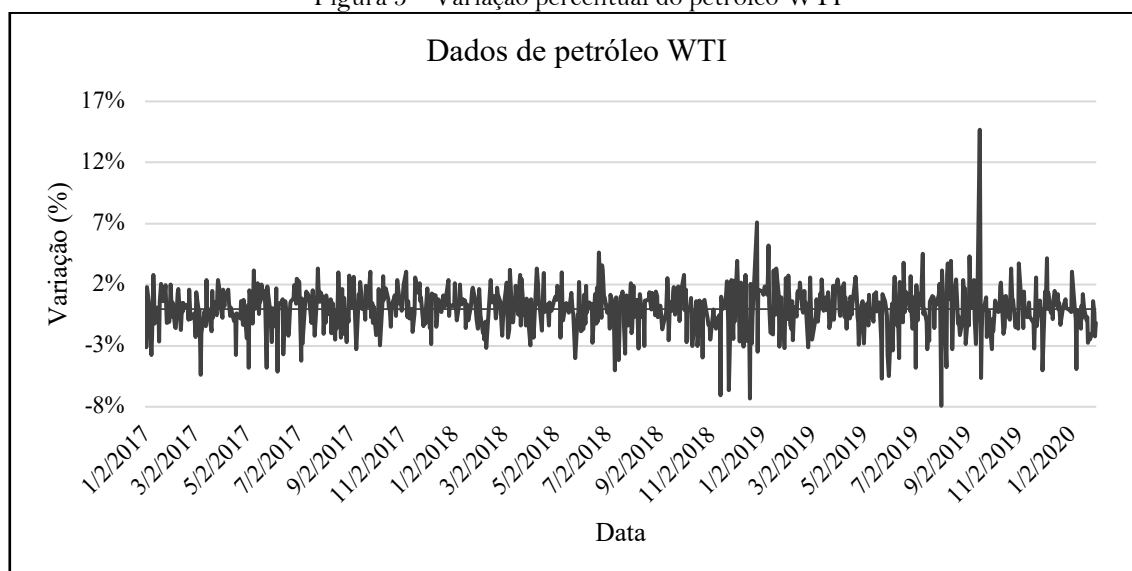
Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 2 – Variação percentual do dólar



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 3 – Variação percentual do petróleo WTI



Fonte: Elaborado pelos autores.

3.2 ELABORAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO

Foram definidos intervalos para as variações percentuais dos dados, a fim de poder calcular as matrizes de transição. Estes intervalos estão apresentados no Quadro 2.

Quadro 2 – Intervalos das variações

4,51% <
de 3,01% a 4,5%
de 1,51% a 3%
de 0% a 1,5%
de -1,5% a -0,01%
de -3% a -1,51%
de -4,5% a -3,01%
< -4,51%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para estes intervalos, foi contabilizado a frequência que ocorriam as variações e assim, calculado a matriz de probabilidade de transição para cada um dos dados, conforme apresentado nas Figuras 4, 5 e 6 para Petrobrás, dólar e petróleo WTI, respectivamente.

Figura 4 – Matriz de transição para Petrobrás

de \ para	4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
P =								
4,51% <	0,083	0,125	0,042	0,083	0,292	0,167	0,083	0,125
3,01% a 4,5%	0,000	0,036	0,127	0,273	0,345	0,164	0,055	0,000
1,51% a 3%	0,031	0,061	0,102	0,327	0,367	0,071	0,010	0,031
0% a 1,5%	0,022	0,082	0,126	0,329	0,277	0,100	0,052	0,013
-1,5% a -0,01%	0,034	0,044	0,126	0,291	0,257	0,165	0,049	0,034
-3% a -1,51%	0,011	0,098	0,174	0,337	0,196	0,130	0,022	0,033
-4,5% a -3,01%	0,088	0,147	0,176	0,294	0,118	0,059	0,118	0,000
< -4,51%	0,150	0,100	0,150	0,250	0,200	0,100	0,000	0,050

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 5 – Matriz de transição para dólar

de \ para	4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
P =								
4,51% <	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000
3,01% a 4,5%	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
1,51% a 3%	0,000	0,000	0,000	0,323	0,484	0,161	0,000	0,032
0% a 1,5%	0,003	0,003	0,038	0,436	0,490	0,030	0,000	0,000
-1,5% a -0,01%	0,000	0,000	0,039	0,537	0,400	0,024	0,000	0,000
-3% a -1,51%	0,000	0,000	0,160	0,560	0,240	0,040	0,000	0,000
-4,5% a -3,01%	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
< -4,51%	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 6 – Matriz de transição para petróleo WTI

de \ para	4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
P =								
4,51% <	0,000	0,000	0,000	0,250	0,250	0,000	0,250	0,250
3,01% a 4,5%	0,000	0,043	0,087	0,522	0,217	0,087	0,043	0,000
1,51% a 3%	0,010	0,039	0,127	0,392	0,294	0,118	0,010	0,010
0% a 1,5%	0,000	0,020	0,143	0,374	0,303	0,095	0,051	0,014
-1,5% a -0,01%	0,014	0,034	0,130	0,367	0,251	0,140	0,034	0,029
-3% a -1,51%	0,000	0,046	0,057	0,460	0,241	0,138	0,023	0,034
-4,5% a -3,01%	0,000	0,000	0,259	0,407	0,222	0,074	0,000	0,037
< -4,51%	0,000	0,063	0,375	0,188	0,250	0,125	0,000	0,000

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.3 ANÁLISE DOS CENÁRIOS

Com a informação das matrizes de probabilidade de transição para cada dado, foi possível calcular as probabilidades de estado estável, apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Probabilidades do estado estável

Intervalo	Probabilidade de estado		
	Petrobrás	Dólar	Petróleo WTI
4,51% <	3,15%	0,13%	0,53%
de 3,01% a 4,5%	7,24%	0,13%	3,03%
de 1,51% a 3%	12,90%	4,08%	13,42%
de 0% a 1,5%	30,40%	48,03%	38,55%
de -1,5% a -0,01%	26,97%	44,08%	27,36%
de -3% a -1,51%	12,23%	3,29%	11,45%
de -4,5% a -3,01%	4,47%	0,13%	3,55%
< -4,51%	2,63%	0,13%	2,11%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ainda, foi analisado o tempo de recorrência esperado para cada probabilidade de estado estável, conforme Quadro 4.

Quadro 4 – Tempo de recorrência esperado

Estado estável π_i	Tempo de recorrência esperado μ_{ii}		
	Petrobrás	Dólar	Petróleo WTI
π_0	31,7 dias	760 dias	189,4 dias
π_1	13,8 dias	760 dias	33 dias
π_2	7,8 dias	24,5 dias	7,5 dias
π_3	3,3 dias	2,1 dias	2,6 dias
π_4	3,7 dias	2,3 dias	3,7 dias
π_5	8,2 dias	30,4 dias	8,7 dias
π_6	22,4 dias	760,2 dias	28,2 dias
π_7	38 dias	760 dias	47,4 dias

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.4 APLICAÇÃO DE CADEIA DE MARKOV MULTIVARIADA

A aplicação da Cadeia de Markov Multivariada ocorreu da seguinte forma: comparativo dos dados da Petrobrás com dólar, e Petrobrás com petróleo WTI. Para a criação de cada matriz de transição, foi separado em duas subseções, de acordo com cada comparativo citado.

3.4.1 Matriz de transição para Petrobrás e dólar

Com o intervalo das variações determinado anteriormente, foi contabilizado a frequência que ocorriam as variações em cada um destes intervalos, mostrados na Figura 7. Esta análise é referente matriz de frequência de transição F analisando o dólar para a Petrobrás com um passo de tempo, ou seja, dólar no tempo t e Petrobrás em $t + 1$.

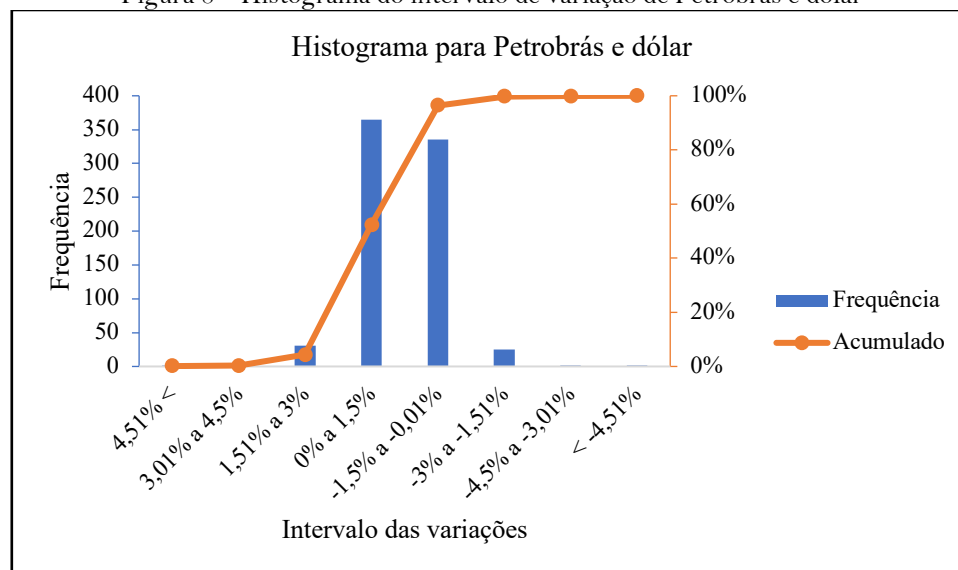
Figura 7 – Matriz de frequência para Petrobrás e dólar

de dólar \ para Petrobrás		4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
F =	4,51% <	0	1	0	0	0	0	0	0
	3,01% a 4,5%	0	0	0	1	0	0	0	0
	1,51% a 3%	3	4	7	8	4	3	1	1
	0% a 1,5%	10	31	47	108	88	50	20	11
	-1,5% a -0,01%	11	17	43	105	105	37	10	7
	-3% a -1,51%	0	2	1	8	8	2	3	1
	-4,5% a -3,01%	0	0	0	0	0	1	0	0
	< -4,51%	0	0	0	1	0	0	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com a matriz de frequência de transição, foi observado o percentual acumulativo que ocorria nas variações de cada um dos intervalos, conforme apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Histograma do intervalo de variação de Petrobrás e dólar



Fonte: Elaborado pelos autores

Com estas informações, foi possível calcular a matriz com as probabilidades de transição P de Markov, analisando quantas vezes variou do estado i para o estado j e representa a probabilidade da transição dos dados de dólar para os da Petrobrás com um passo de tempo, ou seja, dólar no tempo t e Petrobrás em $t + 1$. A Figura 9 apresenta a matriz P .

Figura 9 – Matriz de transição para Petrobrás e dólar

de dólar \ para Petrobrás	4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
4,51% <	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3,01% a 4,5%	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,51% a 3%	0,097	0,129	0,226	0,258	0,129	0,097	0,032	0,032
0% a 1,5%	0,027	0,085	0,129	0,296	0,241	0,137	0,055	0,030
-1,5% a -0,01%	0,033	0,051	0,128	0,313	0,313	0,110	0,030	0,021
-3% a -1,51%	0,000	0,080	0,040	0,320	0,320	0,080	0,120	0,040
-4,5% a -3,01%	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000
< -4,51%	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.4.2 Matriz de transição para Petrobrás e petróleo WTI

Com o intervalo das variações, foi contabilizado a frequência que ocorriam as variações em cada um destes intervalos, mostrados na Figura 10. Esta análise é referente matriz de frequência de transição F analisando o petróleo WTI para a Petrobrás com um passo de tempo, ou seja, petróleo WTI no tempo t e Petrobrás em $t + 1$.

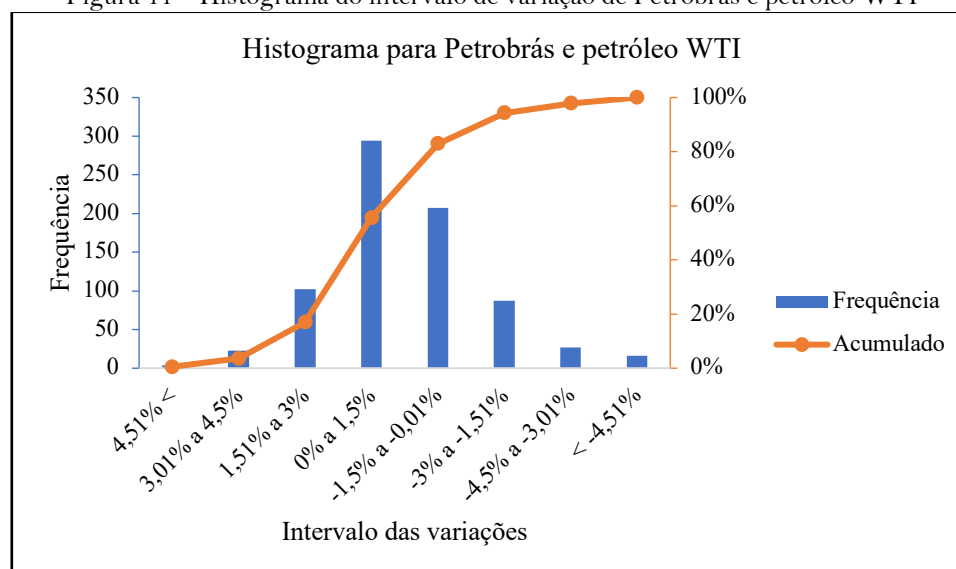
Figura 10 – Matriz de frequência para Petrobrás e petróleo WTI

de petróleo WTI para Petrobrás	4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
F =								
4,51% <	0	1	0	0	3	0	0	0
3,01% a 4,5%	0	2	1	8	3	6	2	1
1,51% a 3%	4	7	13	30	32	9	3	4
0% a 1,5%	8	18	42	89	79	47	5	6
-1,5% a -0,01%	7	16	23	65	56	14	20	6
-3% a -1,51%	4	7	8	31	20	11	4	2
-4,5% a -3,01%	1	1	8	5	6	5	0	1
< -4,51%	0	3	3	3	6	1	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com a matriz de frequência de transição, foi observado o percentual acumulado que ocorria nas variações de cada um dos intervalos, conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Histograma do intervalo de variação de Petrobrás e petróleo WTI



Fonte: Elaborado pelos autores

Com estas informações, foi possível calcular a matriz com as probabilidades de transição P de Markov, analisando quantas vezes variou do estado i para o estado j e representa a probabilidade da transição dos dados de petróleo WTI para os da Petrobrás com um passo de tempo, ou seja, petróleo WTI no tempo t e Petrobrás em $t + 1$. A Figura 12 apresenta a matriz P .

Figura 12 – Matriz de transição para Petrobrás e petróleo WTI

de petróleo WTI para Petrobrás	4,51% <	3,01% a 4,5%	1,51% a 3%	0% a 1,5%	-1,5% a -0,01%	-3% a -1,51%	-4,5% a -3,01%	< -4,51%
P =								
4,51% <	0,000	0,250	0,000	0,000	0,750	0,000	0,000	0,000
3,01% a 4,5%	0,000	0,087	0,043	0,348	0,130	0,261	0,087	0,043
1,51% a 3%	0,039	0,069	0,127	0,294	0,314	0,088	0,029	0,039
0% a 1,5%	0,027	0,061	0,143	0,303	0,269	0,160	0,017	0,020
-1,5% a -0,01%	0,034	0,077	0,111	0,314	0,271	0,068	0,097	0,029
-3% a -1,51%	0,046	0,080	0,092	0,356	0,230	0,126	0,046	0,023
-4,5% a -3,01%	0,037	0,037	0,296	0,185	0,222	0,185	0,000	0,037
< -4,51%	0,000	0,188	0,188	0,188	0,375	0,063	0,000	0,000

Fonte: Elaborado pelos autores.

3.4.3 Análise dos cenários

A análise de cenários necessita do cálculo do estado estável, conforme apresentado nas Equações 9 e 10, para o estudo com os dados da Petrobrás e dólar.

$$(\pi_0 \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \pi_7) = \begin{pmatrix} 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,097 & 0,129 & 0,226 & 0,258 & 0,129 & 0,097 & 0,032 & 0,032 \\ 0,027 & 0,085 & 0,129 & 0,296 & 0,241 & 0,137 & 0,055 & 0,030 \\ 0,033 & 0,051 & 0,128 & 0,313 & 0,313 & 0,110 & 0,030 & 0,021 \\ 0,000 & 0,080 & 0,040 & 0,320 & 0,320 & 0,080 & 0,120 & 0,040 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7) = 1 \quad (10)$$

Resultando no seguinte sistema de equações, exibido pelas Equações 11 a 19.

$$\pi_0 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0,097\pi_2 + 0,027\pi_3 + 0,033\pi_4 + 0\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 \quad (11)$$

$$\pi_1 = 1\pi_0 + 0\pi_1 + 0,129\pi_2 + 0,085\pi_3 + 0,051\pi_4 + 0,8\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 \quad (12)$$

$$\pi_2 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0,226\pi_2 + 0,129\pi_3 + 0,128\pi_4 + 0,04\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 \quad (13)$$

$$\pi_3 = 0\pi_0 + 1\pi_1 + 0,258\pi_2 + 0,296\pi_3 + 0,313\pi_4 + 0,320\pi_5 + 0\pi_6 + 1\pi_7 \quad (14)$$

$$\pi_4 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0,129\pi_2 + 0,241\pi_3 + 0,313\pi_4 + 0,320\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 \quad (15)$$

$$\pi_5 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0,097\pi_2 + 0,137\pi_3 + 0,11\pi_4 + 0,08\pi_5 + 1\pi_6 + 0\pi_7 \quad (16)$$

$$\pi_6 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0,032\pi_2 + 0,055\pi_3 + 0,03\pi_4 + 0,12\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 \quad (17)$$

$$\pi_7 = 0\pi_0 + 0\pi_1 + 0,032\pi_2 + 0,03\pi_3 + 0,021\pi_4 + 0,04\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 \quad (18)$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 \quad (19)$$

Por haver nove equações e oito incógnitas, é necessário desconsiderar uma das equações. Assim, resolvendo este sistema de equações, obtêm-se os seguintes resultados:

$$\begin{array}{ll} \pi_0 = 0,027 & \pi_1 = 0,092 \\ \pi_2 = 0,102 & \pi_3 = 0,359 \\ \pi_4 = 0,210 & \pi_5 = 0,140 \\ \pi_6 = 0,046 & \pi_7 = 0,024 \end{array}$$

Estes valores representam a possibilidade de se encontrar nos determinados estados, e os mesmos cálculos foram realizados para os dados restantes. As probabilidades do estado estável estão apresentadas no Quadro 5.

Quadro 5 – Probabilidades do estado estável

Intervalo	Probabilidade de estado	
	Petrobrás e dólar	Petrobrás e petróleo WTI
4,51% <	2,66%	2,96%
de 3,01% a 4,5%	9,21%	7,88%
de 1,51% a 3%	10,19%	12,24%
de 0% a 1,5%	35,94%	29,73%
de -1,5% a -0,01%	21,04%	27,39%
de -3% a -1,51%	13,95%	12,35%
de -4,5% a -3,01%	4,60%	4,77%
< -4,51%	2,41%	2,68%

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com o Quadro 5, pode-se verificar que há uma maior concentração de probabilidade de estado estável no intervalo de -1,5% a 1,5%, para as duas análises realizadas. Ainda, é possível analisar o tempo de recorrência esperado para cada probabilidade de estado estável, conforme Quadro 6.

Quadro 6 – Tempo de recorrência esperado

Estado estável π_i	Tempo de recorrência esperado μ_{ii}	
	Petrobrás e dólar	Petrobrás e petróleo WTI
π_0	37,6 dias	33,8 dias
π_1	10,9 dias	12,7 dias
π_2	9,8 dias	8,2 dias
π_3	2,8 dias	3,4 dias
π_4	4,8 dias	3,7 dias
π_5	7,2 dias	8,1 dias
π_6	21,7 dias	21 dias
π_7	41,5 dias	37,3 dias

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com o Quadro 6, observa-se que o menor tempo de recorrência do estudo é para a análise de Petrobrás e dólar, com 2,8 dias para o intervalo de 0% a 1,5%, ou seja, quando o dólar variar de 0% a 1,5%, em 2,8 dias o preço da ação da Petrobrás também variará de 0% a 1,5%. Ainda, o menor tempo de recorrência da análise com petróleo WTI é de 3,4 dias para a mesma variação de 0% a 1,5%.

3.5 DISCUSSÃO COM ESTUDOS ANTERIORES

Nesta etapa, apresenta-se uma comparação dos resultados encontrados com estudos anteriores já publicados na área. Para este fim, foram pesquisados artigos nos idiomas inglês e português, no período de 2008 a 2020, em bases de dados indexadores (*Emerald*, Periódicos Capes, *Scielo*, *Science Direct* e *Web of Science*) e nos principais eventos de Engenharia de Produção e Pesquisa Operacional (Encontro Nacional de Engenharia de Produção - ENEGEP e Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO). A combinação das seguintes palavras-chave foi utilizada: “cadeias de markov”, “cadeia de markov multivariada”, “markov”, “bolsa de valores”, “Petrobrás”, “dólar”, “petróleo”, “WTI”, “*markov chain*”, “*multivariate markov chain*”, “*stock exchange*”, “*data analysis*”, “*Petrobras*”, “*dollar*”, “*petroleum*”, “*oil*”. Sendo assim, foram selecionados os artigos que continham aplicações de Cadeias de Markov e aplicações em de análises de câmbios, bolsa de valores e petróleo. Posto isto, a seguir são apresentados os principais resultados encontrados nos nove estudos comparados com esta pesquisa.

Ching, Ng e Fung (2008) publicaram a sua pesquisa envolvendo Cadeias de Markov Multivariadas de ordem superior e seus aplicativos. Assim, os autores propuseram modelo de cadeia de Markov multivariado de 3ª ordem para modelar múltiplas sequências de dados categóricos de modo que o número total de parâmetros, que pode capturar tanto as probabilidades de dependência intra-transição de ordem superior quanto as probabilidades de inter-transição entre as sequências de dados, requerendo significativamente menos parâmetros do que o convencional. Também foi desenvolvido um método de estimativa de parâmetros baseado em uma programação linear. Em seguida, o modelo foi aplicado para resolver problemas de previsão de demanda de vendas em uma empresa de refrigerantes em Hong Kong, objetivando prever a demanda de

vendas e resolver o problema de estoques. Neste sentido, os autores utilizaram o modelo multivariado de Markov de ordem superior para prever os estados e as probabilidades máximas, em termos de produto e de demanda de vendas. Como conclusões, elenca-se o desenvolvimento de métodos de estimativa eficientes para os parâmetros do modelo, com a discussão de um aplicativo para previsões de demanda no controle de estoque.

Takaishi (2009) realizou uma estimativa bayesiana de um modelo GARCH para a taxa de câmbio do dólar americano e para o iene japonês, pelo algoritmo *Metropolis-Hastings*. Foi utilizado simulações em Cadeias de Markov, Monte Carlo e distribuição *t* de *Student*. Assim, o esquema de construção adaptativo pode reduzir significativamente a correlação entre os dados da amostra de aplicações financeiras reais. Por fim, o autor concluiu que o esquema de construção adaptativo é um método eficiente para a inferência bayesiana do modelo GARCH.

Oliveira e Arruda (2013) empregaram Cadeias de Markov com a temática de planejamento do acúmulo de estoque de petróleo, em duas refinarias de São Paulo. Desta maneira, os processos estocásticos destacaram a maximização de processamento e de lucro operacional. Sendo assim, os autores conseguiram encontrar uma política de estoque e consumo que contabilizasse os ganhos e os riscos envolvidos no processo e uma probabilidade de 95% para os casos de carga de processamento de consumo acima de 105 mil m³.

Huang *et al.* (2016) propuseram um modelo de cadeia de Markov oculta espacial (SHMC), integrando dados de poços de petróleo e dados sísmicos. Os dados foram coletados da Bacia do Tarim e de um campo de petróleo ao norte desta Bacia, na China. Assim, os autores apresentaram um modelo SHMC para modelagem geológica, combinando a teoria da cadeia de Markov espacial e a estimativa de Bayes. Por fim, concluiu-se que método SHMC desempenha superioridade tanto na precisão da previsão quanto no reflexo do processo de sedimentação geológica, integrando informações auxiliares.

Casarin, Sartore e Tronzano (2017) desenvolveram um modelo de vetor de comutação de Markov com correlação estocástica para a análise de contágio no mercado das taxas de câmbio. Assim, duas cadeias de Markov independentes apresentam diferentes efeitos como transbordamentos de volatilidade e mudanças de correlação com vários graus de intensidade. Os autores descreveram um procedimento de inferência Bayesiana, com base em Cadeias de Markov e algoritmos de Monte Carlo. Este modelo foi aplicado em taxas cruzadas da Ásia Pacífico em relação ao dólar americano. Assim, foi encontrado fortes evidências que sustentam a existência de efeitos de contágio, quedas de correlação durante as crises e de volatilidade nos mercados de câmbio. Desta maneira, o artigo contribuiu, do ponto de vista econométrico, permitindo que os parâmetros da volatilidade e da dinâmica da correlação dependam de duas cadeias de Markov latentes independentes; com uma modelagem conjunta e uma estrutura de inferência para a dinâmica de média, variância e correlação dos retornos; além de aperfeiçoar a literatura com foco em diferentes moedas, todas expressas em relação ao dólar americano.

Isah e Bom (2017) utilizaram Cadeias de Markov na previsão do preço do petróleo bruto, com dados dos cinco primeiros meses do ano de 2015. Os autores utilizaram os *softwares EVIEWS* e *Maple* para prever os dados diário de séries temporais de preços do petróleo bruto. Assim sendo, foi constatado que as Cadeias de Markov foram capazes de produzir precisões precisas na descrição dos padrões históricos dos preços do petróleo bruto. Por fim, para encontrar a tendência do movimento do índice de ações, os autores encontraram a probabilidade de transição de estado calculando o número de dias, sendo estes, variáveis de 0, 23, 26 e 27 dias.

Kiral (2018) utilizou Cadeias e Markov de estados *Fuzzy* para modelar o preço do petróleo de Brent. Deste modo, o autor avaliou os preços de janeiro de 2003 a janeiro de 2017, classificando os dados em 21 estados difusos e calculou a matriz de transição de probabilidade destes estados para o período utilizado. Posto isto, o autor concluiu que os resultados forneceram informações valiosas aos tomadores de decisão sobre as oportunidades de investimento do petróleo Brent e que quando um retorno mensal aumenta ou diminui significativamente, o retorno esperado do mês seguinte também aumenta ou diminui significativamente.

Cechin e Corso (2019) empregaram Cadeias de Markov de ordem alta para analisar as probabilidades de transições de estado entre os índices Ibovespa e Dow Jones. Desta maneira, os autores utilizaram dados de variação diária entre janeiro de 2008 e março de 2018. Os cálculos realizados implicaram em uma maior frequência de eventos foi a variação entre -0,49% e 0,5% de Dow Jones e Ibovespa. Desta forma, concluiu-se que a aplicação possibilitou o diagnóstico e o direcionamento de esforços e investimentos, prevendo a amplitude dos índices Ibovespa com a utilização de dados de Dow Jones.

Bolson *et al.* (2019) aplicaram Cadeias de Markov para analisar a variação da cotação do dólar americano para a moeda real, utilizando uma base histórica dos anos de 2017, 2018 e parte de 2019, disponível no site *Infomoney*. Nesta publicação, os autores analisaram as equações de estado estável com o tempo de recorrência das probabilidades, comparando tal comportamento com os últimos três anos. Portanto, foi constatado que as maiores ocorrências fixaram na faixa de -0,5% a 0%; 0% a 0,5%; e 0% a 0,5%, como

probabilidades de acontecer uma variação nos respectivos anos utilizados. Assim, foi afirmado que a probabilidade da cotação do dólar diminuir ou aumentar é praticamente a mesma.

Desta maneira, foi possível perceber a diferença das principais publicações na área, envolvendo a parcialmente ou integralmente a temática deste estudo, ambos com foco em aplicações de Cadeias de Markov. Neste sentido, destacam-se as diferenças entre as publicações e a lacuna existente, pelo ineditismo de um estudo empregando cálculos da probabilidade de variação do preço de ação da Petrobrás com o dólar e com o petróleo WTI, e a utilização de Cadeia de Markov Multivariável. Assim, tendo em vista que não foram encontrados trabalhos com o mesmo objetivo e com o intuito de elencar as pesquisas mais próximas desta proposta, evidencia-se Isah e Bom (2017), Cechin e Corso (2019) e Bolson *et al.* (2019), porém, nenhuma considera os mesmos dados, períodos, fontes de pesquisa, referencial e aplicação.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As CMM apresentam-se como uma ferramenta de grande potencial de aplicação e geração de simulação e análise entre variações de estados, considerando diferentes variáveis ao mesmo tempo. Este artigo realizou uma aplicação para analisar a relação entre a variação dos índices de preço das ações da Petrobrás (PETR4), da cotação do dólar e do petróleo WTI, uma vez que a economia brasileira está diretamente relacionada ao mercado acionário americano.

Desta maneira, este trabalho teve como objetivo calcular as probabilidades de variação destes três índices por meio de Cadeias de Markov e foi eficiente na obtenção de resultados. Com o propósito de auxiliar a elaboração da modelagem matemática, utilizou-se o *software* Excel para realização dos cálculos. Os dados utilizados nesta aplicação compreendem o período de 1º de janeiro de 2017 a 31 de janeiro de 2020. Na análise de cenários, por meio das equações de estado estável foi possível determinar a probabilidade do estado passar de i para j após um longo período, assim, mostrou-se que o intervalo com maior concentração de probabilidade do estado estável é entre -1,5% a 1,5%, para as duas análises realizadas. De forma complementar, a partir dessa aplicação, foi possível prever o comportamento destes cenários e obter o tempo de recorrência esperado a fim de fornecer informações aos investidores e, conseqüentemente, possibilitar uma melhor gestão de riscos, direcionamento de seus esforços e investimentos.

A técnica apresentada pode ser considerada como uma opção associada à avaliação para investidores. No entanto, de acordo com a literatura, sabe-se que outras técnicas podem ser utilizadas neste tipo de aplicação. Como sugestão de trabalhos futuros, a partir deste estudo, podem ser feitas comparações utilizando Cadeias de Markov multivariáveis de alta ordem ou também podem ser aplicadas outras ferramentas a partir dessa implementação.

Por fim, ao avaliar os resultados do trabalho como um todo, entende-se que os objetivos previstos para a pesquisa foram atingidos, por meio da possibilidade de previsibilidade do valor das ações da Petrobrás em relação ao dólar e ao petróleo WTI, e da estruturação proposta ter potencial para ser replicada e continuada.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA D. **Assimetrias na volatilidade e nas perturbações nos modelos de volatilidade**. 2013, 126 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.
- ANDERSEN, A.R.; NIELSEN, B. F.; REINHARDT, L. B. Optimization of hospital ward resources with patient relocation using Markov chain modeling. **European Journal of Operational Research**, v. 260, n.3, p. 1152-1163, 2017.
- BOLSON, M. H.; BORELLA, L. C.; TOMÉ, F.; ORLANDIN, B. C.; CORSO, L. L. Aplicação de cadeias de markov para análise de variação do dólar americano. In: XXXIX ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 39., 2019, Santos. **Anais [...]**. Santos: Abepro, 2019. p. 1-13.
- CASARIN, R.; SARTORE, D.; TRONZANO, M. A Bayesian Markov-Switching Correlation Model for Contagion Analysis on Exchange Rate Markets. **Journal of Business & Economic Statistics**, [S.L.], v. 36, n. 1, p. 101-114, 27 abr. 2017.
- CAVALHEIRO, E. A.; CERETTA, P. S.; TAVARES, C. E. M.; TRINDADE, L. L. Previsibilidade de mercados: um estudo comparativo entre Bovespa e S&P500. **Sociais e Humanas**, v. 23, n. 1, p. 61-74, 2010.
- CECHIN, R. B.; CORSO, L. L. High-order Multivariate Markov Chain applied in Dow Jones and Ibovespa indexes. **Pesquisa Operacional**, vol.39, n.1, pp. 205-223, 2019.
- CHING, W.; NG, M. K.; FUNG, E. S. Higher-order multivariate Markov chains and their applications. **Linear Algebra and its Applications**, v. 428, p. 492-507, 2008.

- CHIU, C. W. J., HARRIS, R. D., STOJA, E., & Chin, M. Financial market volatility, macroeconomic fundamentals and investor sentiment. **Journal of Banking & Finance**, v. 92, p. 130-145, 2018.
- D'ALMEIDA, A. L. **Indústria do petróleo no Brasil e no mundo: formação, desenvolvimento e ambiência atual**. São Paulo: Edigard Blücher Ltda., 2015.
- FERNANDES, A.; FONSECA, S.; IQUIAPAZA, R. Modelos de mensuração de desempenho e sua influência na captação líquida de fundos de investimento. **Revista Contabilidade & Finanças**, v. 29, n. 78, p. 435-451, 2018.
- FERSON, E. E.; SARJISSIAN, S.; SIMIN, T. Asset pricing models with conditional betas and alphas: the effects of data mining and spurious regression. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 43, n. 2, p. 331-353, 2008.
- FRANCO, D.G. B.; STEINER, M. T. A. Estudo comparativo de redes neurais artificiais para previsão de séries temporais financeiras. **Blucher Marine Engineering Proceedings**, v. 1, n. 1, p. 303-313, 2014.
- HILLIER, F.; LIEBERMAN, G. **Introduction to Operations Research**. 8. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2005.
- HO, L. L.; QUININO, R. An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for variables based on the results of a sequence of inspections. **Pesquisa Operacional**, v. 32, n.1, p. 197-212, 2012.
- HUANG, X.; LI, J.; LIANG, Y.; WANG, Z.; GUO, J.; JIAO, P. Spatial hidden Markov chain models for estimation of petroleum reservoir categorical variables. **Journal of Petroleum Exploration and Production Technology**, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 11-22, 9 maio 2016.
- HUNTER J. The computation of the mean first passage times for Markov chains. **Linear Algebra and its Applications**, n. 549, p. 100-122, 2018.
- INVESTING BRASIL. Site institucional. Disponível em: <<https://br.investing.com>>.
- ISAH, N.; BON, A. T. Application of Markov Model in Crude Oil Price Forecasting. **Path of Science**, [S.L.], v. 3, n. 8, p. 1007-1012, 16 ago. 2017.
- ISHIZAWA, D. K. **Modelos de volatilidade estatística**. 2008, 74 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2008.
- KIRAL, E. Modeling brent oil price with markov chain process of the fuzzy states. **Pressacademia**, [S.L.], v. 5, n. 1, p. 79-83, 30 mar. 2018.
- MACIEL, L.; BALLINI, R. Modelagem e previsão do valor em risco com modelos de volatilidade baseada em variação: evidências empíricas. **Revista Contabilidade & Finanças**, v. 28, n. 75, p. 361-376, 2017.
- MELLO, A. R. A. F. **Volatilidade implícita das opções de ações: uma análise sobre a volatilidade futura**. 2009. 45 f. Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia) – Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2009.
- MUNTASER, J. G. S.; SILVA, V. P. da.; PENEDO, A. S. T. Aplicação de redes neurais na previsão das ações do setor de petróleo e gás da Bm&F Bovespa. **Revista FSA**, v. 14, n. 6, p. 49-71, 2017.
- OLIVEIRA, M. M. F.; ARRUDA, E. F. Planejamento de acúmulo de petróleo para parada de suprimento sob incerteza de consumo: estudo de caso do duto osvat i e refinarias do estado de São Paulo. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 45., 2013, Natal. **Anais [...]**. Natal: Sbp, 2013. p. 1-12.
- OLIVEIRA, D. B. de.; BORGES, G. F.; CUNHA, M. F. da.; QUEIROZ, L. M. Petrobrás: um caso sobre o valuation para a decisão de investimentos em ações. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, v. 7, n. 3, p. 397-413, 2017.
- RADICCHI, C. **Mercado de câmbio e operações de trade finance**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2014.
- ROSHAN, G.; NASTOS, P. T. Assessment of extreme heat stress probabilities in Iran's urban settlements, using first order Markov chain model. **Sustainable Cities and Society**, v. 36, p. 302-310, 2018.
- SASIKUMAR, R.; ABDULLAH, A. S. An application of multivariate Markov Chain model for fuel price changes in India. **Global and Stochastic Analysis**, v. 4, n.1, p. 49-61, 2017.
- SILVA, P. M. S. **Mercado de capitais: sistema protetivo dos interesses coletivos dos investidores e consumidores**. 2008. 165 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Direito, Faculdade de Direito Lauro de Camargo, Universidade de Ribeirão Preto, Ribeirão Preto, 2008.
- SOUZA, K. P. de. **Aplicação de modelos de Markov ocultos na obtenção de taxas de mortalidade das larvas do mosquito da dengue**. 2010. 89 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ciência da Computação, Faculdade de Computação do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2010.
- STAUDT, F. H.; COELHO, A. S.; GONÇALVES M. B. Determinação da capacidade real necessária de um processo produtivo utilizando cadeia de Markov. **Production**, v. 21, n.4, p. 634-644, 2011.
- TAHA, H. A. **Pesquisa operacional: uma visão global**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- TAKAISHI, T. Bayesian Estimation of GARCH Model with an Adaptive Proposal Density. **Studies in Computational Intelligence**, Berlin, v. 199, n. 1, p. 635-643, jan. 2009.

- WOLF, P. J. W.; OLIVEIRA, G. C. de.; PALLUDETTO, A. W. A. O mercado de ações no Brasil (2003-2015): evolução recente e medidas para seu desenvolvimento. **Revista Pesquisa e Debate**, v. 30, n.2, 2018.
- YANG, H.; LI, Y.; LU, L.; QI, R. First order multivariate Markov chain model for generating annual weather data for Hong Kong. **Energy and Buildings**, v. 43, p. 2371-2377, 2011.
- YU, J.; MEYER, R. Multivariate Stochastic Volatility Models: Bayesian Estimation and Model Comparison. **Research Collection School of Economics**, v. 25, n. 2-3, p. 361-384, 2006.
- ZHU, Q.; SINGH, G. The impacts of oil price volatility on strategic investment of oil companies in North America, Asia, and Europe. **Pesquisa Operacional**, v. 36, n. 1, p.1-21, 2016.