A matemática nos Anos Iniciais: campo aditivo e campo multiplicativo como conceitos estruturantes da Aritmética e da Álgebra

Marlusa Benedetti da Rosa*

Resumo:

O artigo se propõe a tecer reflexões a respeito do processo de conceituação da Matemática. Inicialmente apresenta a Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud, enfatizando aspectos importantes de serem considerados nas propostas pedagógicas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, se ressalta os conceitos estruturantes do campo aditivo e do campo multiplicativo indicando a diferenciação entre os mesmos e os tipos de problemas relacionados a cada um. Na sequência apresentam-se os resultados de uma pesquisa bibliográfica a referente ao processo de aprendizagem da multiplicação e da divisão segundo a teoria dos Campos Conceituais. Com base nesses estudos, indica-se como o campo multiplicativo é importante para o desenvolvimento dos conceitos mais elaborados da Matemática, ou seja, como refletirão na aprendizagem da Aritmética, da Geometria e da Álgebra.

Palavras-chave:

Campos conceituais. Multiplicação. Divisão. Conceitos matemáticos.

Abstract:

This paper proposes to make reflections about the process of conceptualization of mathematics. Initially it presents Gèrard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields, emphasizing important aspects to be considered in the pedagogical proposals of the early years of elementary school. For that, the structuring concepts of the additive field and the multiplicative field are emphasized indicating the differentiation between them and the types of problems related to each one. Following are the results of a bibliographic research referring to the process of learning multiplication and division according to the Theory of Conceptual Fields. Based on these studies, it is indicated how the multiplicative field is important for the development of the most elaborate concepts of mathematics, that is, as they will reflect in the learning of arithmetic, geometry and algebra.

Keywords:

Conceptual fields. Multiplication. Division. Mathematical concepts.

Introdução

O contato com estudantes ingressantes no Ensino Fundamental II, associado às nossas experiências como docente no curso de Pedagogia a Distância da UFRGS, motivaram a escrita desse texto. Ele tem como objetivo oportunizar uma reflexão a cerca da

* > Doutora em Informática na Educação, Professora de Matemática do Colégio de Aplicação da UFRGS. E-mail: marlusa.benedetti@ufrgs.br.

importância do campo multiplicativo nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e sua repercussão nas demais etapas da aprendizagem da Matemática.

Num primeiro momento, apresenta-se a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida pelo psicólogo Gèrard Vergnaud. Com base nessa teoria, se estabelece a diferenciação entre o campo aditivo e o campo multiplicativo. A partir das situações de aprendizagem relacionadas a cada campo, se estabelecem pontos de intersecção e diferenciação entre os mesmos.

Na sequência, apresenta-se uma pesquisa bibliográfica sobre o processo de conceituação de multiplicação e da divisão nos Anos Iniciais. A partir desses estudos argumenta-se sobre a possibilidade de se propor atividades relacionadas ao campo multiplicativo paralelamente ao campo aditivo desde o ingresso na escola. Pretende-se com esses resultados promover uma reflexão sobre as estratégias pedagógicas adotadas no Ensino Fundamental.

Por fim, argumenta-se sobre a como a consolidação do campo multiplicativo influencia no processo de conceituação da Aritmética, da Geometria e da Álgebra favorece, ou não, a aprendizagem dos conceitos matemáticos de Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio e, consequentemente, como o desenvolvimento adequado dessas estruturas pode auxiliar na superação das dificuldades de aprendizagem em áreas afim: Geografia, Ciências, Física, entre outras.

A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais foi elaborada pelo professor e pesquisador francês Gèrard Vergnaud, discípulo de Jean Piaget, e um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática. Sua teoria é uma teoria cognitivista e tem como objetivo fornecer princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas (VERGNAUD, 1996a).

O desenvolvimento dessa teoria sofreu influência das teorias de Piaget e de Vygotsky. Para Vergnaud (1993, p. 75) "há muito mais pontos de convergência do que pontos de desacordo" do que divergência entre essas teorias. Segundo o autor os dois teóricos se interessavam por uma teoria da conceituação. Piaget centrava-se nas estruturas lógicas e no desenvolvimento das operações do pensamento ao passo que Vygotsky estudava o papel da linguagem e das formas simbólicas (VERGNAUD, 1996b).

A Teoria dos Campos Conceituais concentra-se no funcionamento cognitivo do "sujeito-em-ação", por isso, quando nos interessamos pelas relações que se estabelecem na sala de aula, obrigatoriamente, precisamos nos interessar pelo conteúdo do conhecimento. Ou seja, o desenvolvimento cognitivo depende de "situações" e de "conceituações" específicas para lidar com elas (VERGNAUD, 1994 *apud* MOREIRA, 2002, p. 1).

Considerando que as dificuldades dos estudantes são diferentes, de um campo conceitual para o outro, o autor aprofundou seus estudos em relação ao processo de conceituação envolvido na elaboração de conceitos matemáticos no interior de um mesmo campo de conhecimento. O foco de sua pesquisa consiste no processo de conceituação: das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra (VERGNAUD, 1996a).

Ao contrário de outras teorias que utilizam os modelos da linguagem e do tratamento da informação para análise dos modelos complexos, a Teoria dos Campos Conceituais utiliza modelos que atribuem aos próprios conceitos matemáticos um papel essencial. Para o autor os enunciados e o número de elementos em jogo pertencem à complexidade que envolve o processo de aquisição conceitual, mas esses são subordinados a determinadas estruturas (VERGNAUD, 1996a).

O Campo Conceitual se constitui como "[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente entrelaçados no processo de aquisição" (VERGNAUD, 1982 *apud* SOUSA; FÁVERO, 2002, p. 5).

Um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação. Uma situação não se analisa com um só conceito. Além disso, a construção e a apropriação das propriedades de um conceito, ou dos aspectos envolvidos em uma situação é um processo que se desenvolve ao longo de diversos anos, através de analogias e/ou mal entendidos entre: situações, procedimentos e significantes.

Duas ideias principais estão presentes nas situações, são elas:

> 1) a ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceitual, e as variáveis da situação são um meio de gerar, de forma sistemática, o conjunto das classes possíveis;
>
> 2) a ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se depararam e progressivamente dominaram, nomeadamente pelas situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD, 1996a, p. 171).

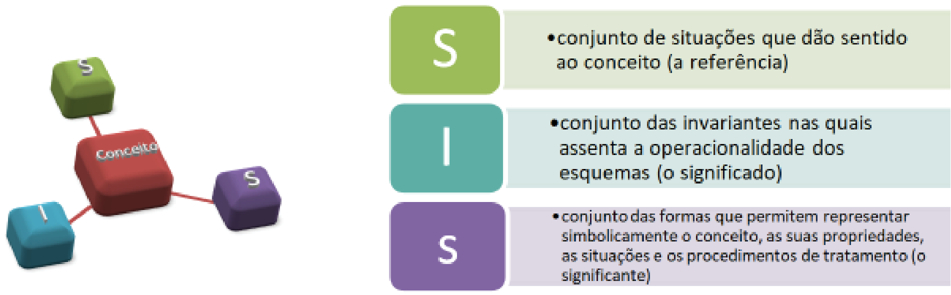
Logo, toda situação é complexa, isso por que a situação se constitui como uma combinação de tarefas, sendo necessário conhecer tanto a natureza da tarefa quanto suas próprias dificuldades. Dessa forma, "a dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma, nem o produto, das dificuldades das diferentes tarefas, mas é claro que o fracasso em uma subtarefa implica no fracasso global" (VERGNAUD, 1996a, p. 167).

A formação de conceitos matemáticos vista sob uma abordagem psicológica e didática leva-nos a considerar o conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação. Essa definição pragmática de conceito se estabelece a partir do conjunto de situações que constituem as referências das suas propriedades, bem como, ao conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações.

Existem situações nas quais o sujeito dispõe de estruturas para lidar com elas e outras nas quais não dispõe dessas estruturas. Quando o sujeito dispõe, no seu repertório, das competências necessárias para lidar com uma situação o tratamento da mesma é relativamente imediato. Já quando não dispõe de todas as competências, faz-se necessário um tempo de reflexão e de exploração, ocorrem hesitações e tentativas que podem resultar em êxitos ou fracassos (VERGNAUD, 1996a).

Para Vergnaud, o processo de conceituação exige a utilização de significados explícitos. Por isso, o autor considera que num conceito devem estar presentes três conjuntos: o conjunto das situações, o conjunto das invariantes e o conjunto das formas. Para ilustrar o processo de constituição do conceito, elaborou-se a Figura 1.

Figura 1 – Tripé de formação de um conceito



Fonte: Elaborada pela autora; releitura de Vergnaud (1996a, p. 166).

A Figura 1 se propõe a indicar que a referência (S), o significado (i) e o significante (s) estão sempre presentes na constituição do conceito e que cada um deles desempenha um papel importante na constituição do mesmo. Por isso, para poder estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito no decurso da aprendizagem faz-se necessário considerar, ao mesmo tempo, os planos da "referência (S)", do "significado (i)" e do "significante (s)".

Com essa perspectiva Teles (2007) destaca que, sob o ponto de vista da aprendizagem, uma situação didática é potencialmente rica quando, necessariamente, leva em consideração: "as dificuldades relativas às tarefas cognitivas, os obstáculos habitualmente enfrentados, o repertório de procedimentos disponíveis, as representações simbólicas possíveis e os esquemas formados anteriormente pelo sujeito" (TELES, 2007, p. 24).

Vergnaud (1996a, p. 156) acredita que quando nos interessamos pela aprendizagem de um conceito, não podemos reduzi-lo à sua definição, pois é "através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança". Nesse sentido, é impossível falar em conceito sem falar em "esquema".

Um esquema corresponde "à organização invariante da conduta para uma dada classe de situações" (VERGNAUD, 1993, p. 78). Os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória podem ser procurados nos esquemas. Esses conhecimentos intitula "conceitos-em-ato" do sujeito. Embora a conceituação extraia da ação sua substância, existe claramente uma influência resultante da conceituação sobre a ação. Usando as palavras do próprio Piaget: "[o] que a conceituação fornece à ação é um reforço de suas capacidades de previsão e a possibilidade, em presença de uma dada situação, de dar um plano de utilização imediata" (PIAGET, 1978, p. 174).

O debate a respeito dos conhecimentos que estão implícitos nos esquemas é aprofundado no conceito de "invariantes operatórias". Onde os elementos cognitivos úteis a uma determinada conceituação designam-se pelas expressões "conceito-em-ato" e "teorema-em-ato".

O conceito de esquema, portanto, adapta-se melhor às situações nas quais o sujeito dispõe das competências necessárias para resolvê-las. Contudo, demonstra-se insuficiente nas situações onde o sujeito tenta várias abordagens. Mesmo nesses casos, a análise dos erros, ou ainda das hesitações, também é estruturada por esquemas. Estes provêm do vasto repertório de esquemas disponíveis, que parecem ter uma relação com a situação tratada naquele momento.

Os esquemas, devido ao fato de apresentarem um parentesco parcial, são apenas esboçados durante tentativas muitas vezes interrompidas antes mesmo de se concretizarem. Cabe salientar ainda que, durante uma situação nova para o sujeito, podem ser evocados vários esquemas ao mesmo tempo, ou ainda, de forma sucessiva.

Na aprendizagem da Matemática, cada esquema é relativo a uma classe de situações com características definidas. No entanto, ao refletirmos sobre o fato de um esquema poder ser aplicado por um sujeito individualmente numa classe mais estreita do que aquela à qual poderia ser aplicado mais eficazmente, percebemos que: "o reconhecimento de invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema" (VERGNAUD, 1996a, p. 161).

Entende-se por generalização (delocalização, transferência, descontextualização) a extensão de um esquema a uma classe mais ampla. Ou seja, novas situações evoluirão após o reconhecimento pelo sujeito de analogias e parentescos entre a classe de situações na qual o esquema já era operatório. Isto ocorrerá a partir de semelhanças e diferenças determinadas por critérios formulados pelo sujeito.

Nas situações de sala de aula, torna-se interessante analisar o posicionamento dos alunos frente à escolha das operações e dos dados adequados para resolução de um problema, em termos de esquemas. Isso porque os esquemas são responsáveis pelas ações executadas pelo sujeito desde a coleta de informação na leitura de um enunciado, passando pela coleta de dados físicos (medidas, por exemplo), ou ainda durante a procura de informações em livros ou quadros estatísticos, assim como, na combinação adequadas dessas informações através de operações de adição, multiplicação, entre outras.

Os esquemas são o centro do processo de adaptação. Eles são compostos por quatro elementos indispensáveis:

> INVARIANTES OPERATÓRIAS: instrumentos de conceituação de situações de referências do domínio considerado. INFERÊNCIA: que tomam a forma de operações, a partir de informações fornecidas pelas situações e a partir das qualidades operatórias dos invariantes. REGRAS DE AÇÃO: que permitem decidir sobre as ações que se têm de por em prática e que ao mesmo tempo, resultam das "operações" inferenciais. São as regras que engendram o seguimento das ações. ANTECIPAÇÕES E PREDIÇÕES: que dizem respeito ao efeito que se deseja obter e que resultam igualmente das "operações" inferenciais. (VERGNAUD, 1993, p. 78).

Os invariantes operatórios são responsáveis pela procura de informações relativas ao problema a ser resolvido. Nesse sentido, articulam teoria e prática constituindo a base conceitual implícita ou explicita que permite inferir regras de ação mais eficazes. Os teoremas-em-ato e os conceitos-em-ato são as principais categorias dos invariantes operatórios. "Um teorema-em-ato é uma proposição, considerada como verdadeira, sobre o real; um conceito-em-ato é uma categoria de pensamento considerada como pertinente." (VERGNAUD, 1996 *apud* SOUSA; FÁVERO, 2002, p. 6). Existe, portanto, uma relação dialógica entre conceitos-em-ato e teoremas-em-ato que se estabelece à medida que os conceitos são ingredientes dos teoremas e, estes, são proposições que dão aos conceitos seus conteúdos.

Cabe observar ainda que conceitos-em-ato não são conceitos da mesma forma que teoremas-em-ato, mas também não são teoremas. Isso ocorre porque diferentemente da ciência, onde se pode discutir a veracidade dos conceitos e dos teoremas, na conceituação, os conceitos e teoremas são apenas a parte visível do "*iceberg*", a qual não seria nada sem os invariantes operatórios que constituem a parte escondida (VERGNAUD, 1996a).

Portanto, é preciso entender esse processo como um movimento em espiral crescente, onde a cada nova situação, os invariantes operatórios podem tornar-se conceitos e teoremas científicos, dependendo dos domínios onde estiverem atuando. Cabe ao professor contribuir para que essa evolução ocorra. Por isso, no texto a seguir apresentam-se aspectos necessários para o processo de conceituação das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos números naturais.

Campo aditivo e campo multiplicativo: aspectos que precisam ser considerados no ensino-aprendizagem das quatro operações

A Teoria dos Campos Conceituais serviu de subsídio para diversos estudos que se preocuparam em entender o processo de conceituação das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos números naturais. Dentre esses estudos selecionou-se as contribuições de Nunes e Bryant (1997) e Nunes *et al*. (2001), as quais apresentam as características comuns e as diferenças existentes entre o "campo aditivo" e o "campo multiplicativo".

Nunes e Bryant (1997, p. 142) observam que é comum no contexto escolar se ensinar a adição antes da multiplicação. Os autores apresentam como possível razão para se ensinar dessa forma o fato de os professores entenderem que a aprendizagem da multiplicação é mais difícil do que a da adição e que a adição forma base para a multiplicação. Os autores alertam que, embora essas crenças não estejam totalmente equivocadas, elas evidenciam a falta de compreensão de que a aprendizagem da operação de multiplicação e da sua operação inversa, a divisão, vai muito além do cálculo de quantidades e que envolvem, portanto, aspectos diferentes dos comuns a adição e a subtração.

A constituição do campo aditivo envolve a coordenação cada vez maior dos esquemas de juntar, retirar e colocar em correspondência um-a-um. Esses se organizam em três fases: na primeira fase, as crianças usam seus esquemas de ação apenas de maneira direta independentemente um do outro. Já na segunda fase, são constituídas estruturas que permitem a compreensão da subtração como operação inversa da adição e vice-versa. A terceira etapa corresponde à fase da comparação na qual os estudantes mobilizam as condições necessárias para colocar em correspondência um para um, os termos de conjuntos diferentes.

Para ilustrar esse o processo de constituição do raciocínio aditivo se organizou o Quadro 1. A primeira coluna desse quadro apresenta os conceitos estruturantes de cada fase. Na segunda coluna encontram-se as regularidades envolvidas e, na última coluna, exemplos de problema relacionados aos conceitos e as regularidades correspondentes.

Quadro 1 – Análise dos conceitos estruturantes do campo aditivo

Conceitos estruturantes	Regularidades	Exemplos de problemas
Juntar/contar Retirar/contar	Esquemas de ação direta, ou seja, independentes um do outro	- Paulo tinha 9 figurinhas, deu duas dessas figurinhas para seu colega Carlos. Quantas figurinhas ele tem agora? - Paulo tem 16 figurinhas num pacote e 7 em outro pacote. Quantas figurinhas Paulo têm no total?
Retirar é o inverso de juntar	Esquemas de ação inversa — a situação envolve um esquema de ação e a aplicação de um esquema inverso	- Eduardo tinha algumas bolitas, ganhou mais 3 bolitas de seu amigo e ficou com 12 bolitas. Quantas bolitas ele tinha?
Comparar	Esquema de correspondência "um-a-um"	- Numa sala há 9 alunos e 6 cadeiras. Há mais cadeiras ou alunos? Quantos a mais?

Fonte: Elaborado pela autora; inspirado em Nunes *et al*. (2001, p. 43-51).

Por outro lado, os conceitos estruturantes do campo multiplicativo são a proporcionalidade, a organização retangular e a combinatória. Para auxiliar na compreensão desses conceitos estruturou-se o Quadro 2. Nele estão destacados os conceitos estruturantes, as regularidades envolvidas e alguns exemplos de problemas relacionados aos conceitos e as regularidades das operações de multiplicação e de divisão.

Quadro 2 – Análise dos conceitos estruturantes do campo multiplicativo

Conceitos estruturantes	Regularidades	Exemplos de problemas
Proporcio-nalidade	“Um para muitos” A está para B na mesma medida em que B está para C (replicar) “Muitos para muitos” A X B = C logo A = C/B e B = C/A	- Um carro tem 4 rodas. Quantas rodas tem 5 carros? - Numa festa foram levados 16 refrigerantes pelas crianças e cada uma delas levou 2 garra-fas. Quantas crianças havia na festa? - Cleonice, Cleber e Clarice são primos. Cleonice tem 6 anos, Cleber tem o dobro de Cleonice e Clarice tem o triplo da idade de Cleber. Quantos anos tem Clarice? - João tem 12 selos e Marta tem a terça parte da quantidade do amigo. Quantos selos tem Marta?
Organização retangular	Análise bidimensional	- Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão? - Um salão tem 20 cadeiras distribuídas em colunas e fileiras. Como elas podem ser organizadas?
Combinatória	Formação de subconjuntos (distribuir)	- O uniforme da escola de Arthur em opção de três cores de camiseta (branca, cinza e azul) e duas opções de calças (preta e azul marinho). Quantas são as combinações de roupa que podem ser feitas. - Uma menina pode combinar suas saias e blusas de 6 maneiras diferentes. Sabendo que ela tem apenas 2 saias, quantas blusas ela tem?

Fonte: Elaborado pela autora; releitura de Nunes *et al.* (2001, p. 143-149).

A análise comparativa entre o Quadro 1 e o Quadro 2 evidencia claramente que, embora haja intersecção entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo, a operação de multiplicação não pode ser reduzida a adições repetidas, assim como a divisão não se constitui apenas como subtrações repetidas. Se por um lado raciocínio aditivo refere-se a situações que podem ser analisadas a partir do axioma “o todo é a soma das partes”, ou seja, a invariante conceitual do raciocínio aditivo é a “relação parte-todo”. Por outro lado, o raciocínio multiplicativo envolve a relação entre duas quantidades, grandezas ou variáveis. As situações multiplicativas envolvem quantidades em relação constante entre si. “A relação constante entre duas variáveis é que possibilita a dedução na resolução de problemas de raciocínio multiplicativo.” (NUNES *et al*., 2001, p. 79).

O raciocínio multiplicativo envolvido na “proporção” é uma nova forma de sentido de número expresso por uma correspondência “um para muitos” ou “muitos para muitos”. Na estrutura multiplicativa a ação consiste em “replicar” em vez de “juntar”. A quantidade de replicações é denominada por “fator escalar”. As situações multiplicativas vão tornando-se cada vez mais complexas conforme aumenta o número de variáveis. Nesse contexto, emerge uma nova visão nas relações parte-todo, que se constitui como outro tipo de ação a “distribuição”.

Na distribuição existem três fatores a serem considerados: o total, o número de receptores e a cota (quantidade de receptores). Essa distribuição da origem a outro conjunto numérico, o conjunto dos números racionais, no qual estão inseridas “as frações”. As frações têm sua origem em divisões sucessivas (NUNES; BRYANT, 1997, p. 150).

A análise do Quadro 2 indica que, semelhante ao que acontece no raciocínio aditivo, o raciocínio multiplicativo também estrutura-se em etapas, e para que ele se desenvolva faz-se necessário oportunizar aos estudantes situações as quais tenham como foco a coordenação entre esquemas de ação que possibilitarão a constituição desses conceitos, quais sejam: os esquemas da correspondência e da distribuição.

Desenvolver os conceitos do campo multiplicativo envolve entender um conjunto inteiramente novo de sentidos de número e de invariantes operatórios os quais estão relacionados à multiplicação e à divisão, mas não estão ligados à adição e à subtração.

Para auxiliar na compreensão dessa diferenciação organizou-se o Quadro 3. Nele se apresenta, na primeira coluna, as situações ligadas ao raciocínio aditivo e, na segunda coluna, as situações presentes no raciocínio multiplicativo.

Quadro 3 – Raciocínio Aditivo *versus* Raciocínio Multiplicativo

Raciocínio Aditivo	Raciocínio Multiplicativo
i. Situações nas quais os objetos (ou conjunto de objetos) são reunidos ou separados. ii. Situações aditivas estão diretamente relacionadas ao tamanho do conjunto. iii. Situações relacionam "um para um" (comparação).	i. Situações que envolvem relações entre variáveis. ii. Situações que envolvem distribuição, divisão, divisões ao meio... iii. Situações de correspondência "um para muitos" (relação).

Fonte: Elaborado pela autora; inspirada em Nunes e Bryant (1997, p. 143).

A análise dos tipos de situação apresentados no Quadro 3 evidencia que a compreensão da adição e da subtração depende de esquemas de ação estruturados a partir das ações de "juntar" e de "retirar". Essas operações, embora distintas, estão relacionadas à mesma estrutura de raciocínio a qual foi denominada por "campo aditivo". Ao passo que as ações de "distribuir" e de "relacionar (colocar em correspondência)" dão origem aos esquemas de ação que constituirão as operações de multiplicação e de divisão, denominadas de "campo multiplicativo".

Nesse texto, pretendeu-se indicar os conceitos estruturantes e as regularidades presentes nos campos aditivo e multiplicativo. Também foram evidenciados os pontos de intersecção entre os dois campos e as diferenças existentes entre os mesmos. Isso porque se acredita na importância de os docentes conhecerem o processo de conceituação de seus estudantes como forma de oportunizar situações de aprendizagem capazes de ampliar o sistema de conceituação dos aprendizes.

Metodologia

Com a perspectiva de contribuir para a formação docente e de oportunizar uma reflexão sobre a possibilidade de mudanças nas propostas pedagógicas de Matemática desenvolvidas no Ensino Fundamental I, partiu-se em busca de estudos que utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais com ênfase no campo multiplicativo.

Para tanto, pesquisou-se em bibliotecas digitais e em revistas especializadas em Educação Matemática. Foram utilizadas como palavras-chave: "campos conceituais", "campo multiplicativo" e "operação de multiplicação e de divisão". O processo de seleção baseou-se inicialmente na leitura dos resumos e, quando o foco do estudo centrava-se no processo de conceituação dos estudantes, partiu-se para a leitura na íntegra. A seguir apresentam-se as contribuições de cada texto.

O que dizem as pesquisas sobre a aprendizagem da matemática nos Anos Iniciais?

O texto a seguir apresenta alguns estudos que se dedicaram a analisar contextos de aprendizagem profícuos para o desenvolvimento do campo multiplicativo. Abstraindo-se dos resultados apresentados nas pesquisas busca-se argumentar sobre a importância de se abordar o campo multiplicativo durante todo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, ou seja, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Curi e Pires (2004) realizaram uma pesquisa sobre a formação para ensinar Matemática dos professores polivalentes. O trabalho analisou grades curriculares, ementas de cursos da área de Matemática de 36 cursos de Pedagogia. Teve a intensão de refletir sobre como se desenvolve o conhecimento para ensinar Matemática nesses cursos. A análise documental indicou que os professores em formação tem contato com poucas pesquisas de Educação Matemática e poucas indicações de livros escritos por educadores matemáticos.

Segundo as pesquisadoras, é importante que os cursos destinados à formação de professores polivalentes oportunizem reflexões sobre as especificidades próprias do ensino/aprendizagem de Matemática. Indicam que reflexões levem em consideração a seleção e a escolha dos conteúdos, a organização de modalidades pedagógicas, dos tempos e dos espaços da formação, a abordagem metodológica e a avaliação. Os resultados desse estudo corroboram com nossas impressões enquanto docente de Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio e que motivaram a escrita desse artigo.

Corrobora com a pesquisa anterior o artigo de Fávero e Neves (2012) que divulga uma pesquisa de cunho bibliográfico que analisou 65 estudos, publicados durante os anos de 1999 até 2010, relacionados aos conceitos de divisão e de número racional. A análise se deu a partir do ponto de vista teórico e metodológico adotados nos estudos e a identificação de possíveis aspectos comuns relacionados à prática conceitual e ao processo de aquisição do conhecimento.

No que tange ao processo de conceituação da divisão e dos números racionais os estudos convergem nos seguintes aspectos: destacam a importância da compreensão da lógica do sistema numérico decimal; identificam que as práticas, em sala de aula, predominantemente priorizam a exposição de regras, em detrimento do conceito; destacando fundamentalmente o papel do professor. Como solução para esses problemas as autoras indicam que se leve em consideração a análise das regulações cognitivas (Psicologia do Desenvolvimento) no processo de ensino-aprendizagem, considerando, portanto, a atuação tanto do estudante quanto do professor.

As conclusões do estudo de Fávero e Neves (2012) destacam a importância de os professores alterarem suas práticas pedagógicas. Segundo Rosa (2013), a alteração da prática pedagógica está diretamente relacionada ao processo de conceituação do professor. Portanto faz-se necessário problematizar os conhecimentos através do acesso às informações relacionadas ao processo de desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Outro estudo selecionado foi o de Guimarães (2004) o qual, tomando como base a Epistemologia Genética de Jean Piaget, buscou o compreender o processo de construção da noção de multiplicação. Participaram da pesquisa 30 estudantes da terceira e quarta séries do Ensino Fundamental. A seleção desses estudantes se deu a partir da aplicação de três provas Piagetianas (Multiplicação, Associatividade Multiplicativa e Generalização). Os estudantes selecionados foram convidados a participar de duas situações lúdicas com um jogo de argolas. Após essa atividade realizaram outra prova (Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa inspirados em Vergnaud).

A análise das respostas apresentadas pelos estudantes indicou aumento no percentual de acertos depois da participação nas atividades lúdicas. O estudo indica que oportunizar aos estudantes situações empíricas relacionadas ao campo multiplicativo é importante para a elaboração das estruturas multiplicativas, pois elas se constituirão como alicerce para as antecipações e, consequentemente, para o progresso conceitual.

Indicação semelhante encontrou-se na dissertação de Lima (2012) a qual consistiu na realização de uma pesquisa de cunho qualitativo, na modalidade de estudo de caso. Foram investigadas as estratégias de resolução de problemas de divisão adotadas por estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental. Participaram da pesquisa 105 jovens de três escolas públicas do município de Alagoas. As questões desenvolvidas pela pesquisadora foram aplicadas em quatro turmas pelas professoras regentes, ou seja, a pesquisadora não teve contato com os sujeitos da pesquisa.

Num primeiro momento, foram oferecidos aos estudantes 10 problemas relacionados às operações de multiplicação e de divisão. Os problemas de divisão continham soluções com e sem resto. Num segundo momento, foram aplicados quatro problemas, sendo três relacionados a quotas e um relacionado à partição. Os problemas propostos assemelhavam-se aos apresentados nos livros didáticos, pois a pesquisadora desejava que fossem semelhantes aos que os estudantes realizavam habitualmente. O primeiro protocolo de análise consistiu no levantamento das estratégias de solução adotadas pelos estudantes, dando origem a três subcategorias: certo, errado e em branco.

As estratégias corretas foram classificadas quanto às formas adotadas para a resolução dos problemas. A análise das respostas indicou 74% de acertos no que tange a resolução dos problemas, sendo que desses 48% dos estudantes utilizaram o algoritmo da divisão (fundamentado na tabuada), 13% usaram o algoritmo da adição, 12% responderam fazendo uso da língua materna, 22% utilizaram ilustração para obter suas respostas e os demais se dividiram entre algoritmo da multiplicação, ensaio e erro e estratégias combinadas.

Sob a luz da teoria dos Campos Conceituais e de estudos correlatos a pesquisadora observou que as estratégias utilizadas pelos alunos baseiam-se, fundamentalmente, na tabuada da multiplicação e/ou no uso do raciocínio aditivo (parcelas repetidas). Outro aspecto constatado foi a ausência da linguagem matemática, já que as respostas apresentadas fundamentaram-se na língua materna. Por fim, destaca a importância de os professores do Ensino Fundamental I proporem mais atividades relacionadas a situações problemas incentivando o desenvolvimento do pensamento matemático e não apenas os algoritmos.

O estudo de Lima (2012) alerta para o fato de que, mesmo no quarto ano do ensino fundamental, período no qual já é desejável que os estudantes utilizem conceitos estruturantes do campo multiplicativo o foco ainda está no raciocínio aditivo e no uso da tabuada. Tal fato serve de alerta para que os professores reflitam sobre o porquê disso ocorrer. Além disso, os estudantes ainda não fazem uso da linguagem matemática dado esse que indica, também, necessidade de intervenção nesse sentido. Logo no início do quinto ano os estudantes se depararão com o conceito de fração o qual exige reflexão na perspectiva dos operadores multiplicativos conforme indicado anteriormente.

No artigo de Magina, Santos e Merlini (2014), obtivemos dados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar o desempenho e as estratégias de estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental na resolução de duas situações do Campo Conceitual Multiplicativo. O estudo de cunho qualitativo analisou, sobe a luz da teoria de Vergnaud, as repostas elaboradas por 349 estudantes a 13 questões. As respostas foram classificadas considerando-se os níveis de raciocínio empregados por eles.

O recorte da pesquisa apresentado no texto teve como foco dois tipos de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência de muitos para muitos. Os resultados indicaram que os estudantes do 5º ano, em sua maioria, usaram procedimentos multiplicativos enquanto que os estudantes do 3º ano usaram procedimentos aditivos na obtenção de suas respostas e, de maneira geral, as análises indicam uma evolução limitada da competência dos estudantes ao lidarem com problema multiplicativo (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014).

Destacamos do artigo o Quadro 4, no qual os autores apresentam exemplos de estratégias usadas na resolução de problemas multiplicativos. Aos autores alertam que as praticas pedagógicas desenvolvidas dessa forma passam a noção de que multiplicar é adicionar parcelas repetidas. Os três problemas apresentados têm o mesmo grau de complexidade, ou seja, se conhece a quantidade de ovos usadas em cada bolo a única diferença é a mundança na variação numérica relativa a quantidade de bolos. No problema 3 para introduzir o algoritmo da multiplicação significativamente o número de fatores.

Quadro 4 – Exemplos de estratégias usadas na resolução de problemas multiplicativos

Problema 1	Problema 2	Problema 3
Dona Benta gasta 4 ovos para fazer 1 bolo. Ela quer fazer 3 bolos. Quantos ovos ela vai gastar? 4 ovos + 4 ovos + 4 ovos = 12	Dona Benta gasta 4 ovos para fazer 1 bolo. Ela quer fazer 8 bolos. Quantos ovos ela vai gastar? 8 bolos X 4 ovos 8 X 4 = 32	Dona Benta faz 35 bolos por mês e ela gasta 4 ovos em cada bolo. Quantos ovos ela gastará no mês? 35 x 4 140

Fonte: Magina, Santos e Merlini (2014, p. 518).

Os autores destacam que não são contrários a introdução da multiplicação por meio de adição de parcelas iguais. Acreditam que esse procedimento coloca a multiplicação em continuidade a adição, porém salientam que o processo cognitivo envolvido no campo multiplicativo envolve muitas outras situações, o que corrobora com o que foi apresentado anteriormente no Quadro 3.

Magina, Santos e Merlini (2014) alertam ainda que restringir a multiplicação a adição de parcelas iguais pode levar o estudante a concluir que a multiplicação sempre aumenta, o que de fato não ocorre em outros conjuntos numéricos. No conjunto dos números inteiros a multiplicação pode dar origem a um número menor, por exemplo, 3 X (- 4) = - 12. O mesmo ocorre no conjunto dos números racionais quando temos (0,4) X (0,4) = (0,16), ora 0,16 também é menor do que 0,4.

O estudo de Magina, Santos e Melini (2014) traz uma contribuição importante para nosso texto na medida em que indica que uma abordagem parcial do campo multiplicativo centrada apenas na adição de parcelas iguais num futuro próximo poderá acarretar obstáculos epistemológicos na ampliação do sistema conceitual dos estudantes relativa à apropriação de outros conjuntos numéricos dentre os quais citamos o dos números inteiros e o dos números racionais. No Ensino Fundamental II seguidamente se observa dificuldades dos estudantes na compreensão das operações nos conjuntos numéricos, o que indica dificuldades no processo de conceituação da Aritmética.

Corrobora com os dados anteriores a pesquisa de Alves e Lima (2012), a qual teve como objetivo identificar possíveis lacunas na aprendizagem da aritmética e compreender como essas lacunas podem interferir no processo de conceituação dos números racionais. As pesquisadoras desenvolveram, aplicaram e analisaram, oito situações problemas. Duas em turmas do 4º ano e seis em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. As respostas dos estudantes foram agrupadas através da análise de conteúdo. As respostas evidenciaram pouco domínio das operações de soma, subtração e multiplicação envolvendo os números racionais e quase nenhum domínio em relação à divisão. Concluíram a análise indicando a necessidade de se desenvolverem atividades no Ensino Fundamental I pautada na construção dos conceitos.

O estudo de Alves e Lima (2012) converge com os resultados apresentados por Magina, Santos e Merlini (2014), Fávero e Neves (2012), Guimarães (2004) e Lima (2012), quando afirmam que os professores devem pautar suas propostas pedagógicas para a aprendizagem dos conceitos. Esses estudos indicam ainda a construção do campo multiplicativo como alicerce desse processo de conceituação.

Na busca de compreender possíveis formas de intervenção focadas na compreensão de conceitos, nos deparamos com o texto de Starepravo (2013) o qual foi apresentado no

XI Encontro Nacional de Educação Matemática. A autora apresentou uma proposta de ensino para a constituição das estruturas multiplicativas que consiste na resolução de problemas e no uso de jogos como possibilidade de ampliar as estruturas já desenvolvidas. Os resultados desse estudo indicaram contribuições significativas em relação ao desenvolvimento de competências matemáticas.

A leitura do texto anterior nos levou à tese de Starepravo (2010). Durante a pesquisa a que consiste em uma pesquisa qualitativa sobre o ensino e aprendizagem de matemática com o objetivo de propor uma metodologia para ensinar a multiplicação nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O estudo se propôs a superar o ensino da multiplicação que privilegia a memorização da tabuada e a aplicação de algoritmos em detrimento da compreensão.

A proposta de intervenção foi aplicada durante um semestre em uma turma de terceira série. As atividades exploraram problemas de proporcionalidade e de arranjo retangular. A divisão foi incorporada ao estudo como operação inversa da multiplicação. Os dados coletados foram classificados por processos relacionados as relações intelectuais, relações sociais/morais e relações didáticas que emergiram durante a aplicação das atividades.

Na categoria das relações intelectuais (a qual relaciona-se mais fortemente com nosso objeto de estudo) o foco da análise centrou-se nas produções dos estudantes. A pesquisadora classificou as respostas dos estudantes obtidas na resolução das atividades propostas considerando as seguintes categorias: o conteúdo da resposta, o tipo de procedimento utilizado, o tipo de notação produzida e a verificação de erros.

A análise sobre as formas como as crianças lidavam com a multiplicação deu origem as seguintes subcategorias: uso da contagem unitária, progressos da contagem para o cálculo, a questão da ordem dos fatores e a questão da posição nos arranjos retangulares. Ao passo que as questões relativas à divisão foram organizadas em duas categorias: a notação simbólica convencional e procedimentos para resolução de problemas (STAREPRAVO, 2010).

Os resultados obtidos indicaram que embora os sujeitos da pesquisa já conhecessem os algoritmos convencionais da multiplicação e da divisão eles utilizaram na resolução dos problemas propostos a contagem unitária. O raciocínio multiplicativo foi utilizado como recurso somente em momentos posteriores. Ou seja, a compreensão da multiplicação desencadeia-se através de uma substituição progressiva das estratégias de contagem pelos procedimentos de cálculo. Sendo, portanto, adquiria mediante o exercício e a reflexão sobre as ações executadas chegando a substituição de procedimentos simples por outros mais abstratos (STAREPRAVO, 2010).

No que tange a construção da notação simbólica convencional da multiplicação e da divisão a autora alerta que deve ser abordada considerando-se os as aspectos semânticos e sintáticos, pois quando um desses aspectos é priorizado em detrimento do outro o processo de conceituação acaba sendo prejudicado. Alerta ainda que a multiplicação é uma das operações fundamentais da aritmética, juntamente com a adição, a subtração e a divisão. As operações de multiplicação e sua inversa, a divisão, são consideradas operações de segundo grau, ao passo que a adição e a subtração são cosideradas do primeiro grau. Também oriundas da multiplicação, porém classificadas como operação de terceiro grau temos a potenciação e suas operações inversas a radiciação e a logaritmação (STAREPRAVO, 2010).

Destaca-se a importância do estudo de Starepravo (2010), pois o mesmo corrobora com o argumento construido nesse texto que tem como foco destacar a importância de os professores conhecerem o processo de conceituação do campo multiplicativo para poderem auxiliar seus alunos a ampliarem o sistema de significação. Além disso, o estudo alerta sobre a interferência que a defasagem nesse sistema conceitual pode causar na aprendizagem de outros conceitos denter eles a potenciação, a radiciação e a logaritmação. Outrossim, essas operações são fundamentais para a compreensão do conjunto dos números irracionais e, consquentemente, dos números reais reais. Ou seja, uma abordagem fragmentada relativa ao campo multiplicativo, centrada apenas em um dos aspectos envolvidos nesse campo, ou fortemente relacionada a aprendizagem de algoritmos certamente acarretará defasagem cognitiva nos estudantes nos anos escolares subseguintes.

Corrobora com o estudo de Starepravo (2010, 2013) a pesquisa de Teles (2007) que buscou compreender como como se dá o processo de conceituação da área de figuras planas (quadrados, retângulos, paralelogramos e triângulos) na Matemática Escolar. A autora desenvolveu sua pesquisa articulando estudos teóricos, análise documental e aplicação de testes.

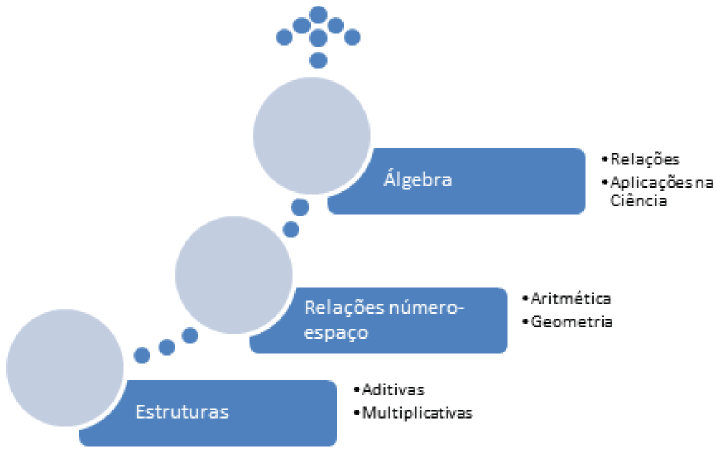
Durante a análise do processo de apropriação das fórmulas relacionadas ao cálculo de área, observou imbricações entre os campos conceituais conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional. Fato também identificado durante a pesquisa documental que teve como preocupação estudar a evolução do conceito de área ao longo da história da Matemática. A autora identificou que a elaboração do conceito de área emerge, de maneira geral, a partir de problemas de ordem social. A análise histórica também evidencia imbricações entre as grandezas e a geometria, bem como entre as grandezas e a álgebra.

A análise histórica mostrou que o conceito de número racional está relacionado a noção de medida de grandeza. Isso porque os números inteiros positivos eram insuficientes para exprimir medida de grandezas reais com a aproximação desejada, assim tornou-se necessário subdividir a grandeza unitária originando os números racionais (TELES, 2007). O estudo das grandezas também está intimamente relacionado a noção de função. segundo a autora, o processo de contagem abstrata e o agrupamento de todo o tipo de elementos "fez com que o homem aprendesse a estimar, avaliar e medir grandezas diversas, evidenciando imbricações entre o campo numérico e o das grandezas" (TELES, 2007, p. 75). A álgebra também tem origem em situações geométricas. Ao longo dos séculos os matemáticos foram aprendendo a substituir as palavras por letras e pequenos sinais, até chegarmos aos símbolos que conhecemos hoje.

Destaca-se a importante contribuição do estudo de Teles (2007, p. 75) pois o mesmo registrou imbricações entre diversos campos conceituais. Do ponto de vista histórico, as imbricações se refletem na própria organização do conhecimento. Em todos os campos, geométrico, numérico, algébrico ou funcional, o conhecimento se origina num primeiro momento num processo empírico, quando são postos problemas de ordem social.

Levando-se em conta a proposta de imbricações entre os campos conceituais identificada por Teles (2007) tanto no processo histórico da Matemática, como nas ações dos sujeitos de sua pesquisa os quais já estavam nos anos finais da Educação Básica e articulando-se com os estudos de Vergnaud (1996a, 1996b), organizou-se a Figura 2 na qual, a cada etapa, são expressas os elementos estruturantes para a ampliação do processo de conceituação de Matemática.

Figura 2 – Elementos estruturantes do processo de conceituação da matemática



Fonte: Elaborada pela autora.

Destaca-se na Figura 2 que o campo aditivo em conjunto com o campo multiplicativo se constituem como alicerce para o campo numérico, geométrico e algébrico. E que a ampliação do sistema conceitual desenvolve-se exponencialmente através da articulação entre cada um desses campos. Cabe destacar que esse processo de conceituação apresentado é um recorte de muitos outros processos envolvidos em cada aprendizagem do sujeito e que, consequentemente, interfere na aprendizagem global do estudante. Ou seja, as estruturas desenvolvidas nas séries iniciais se constituem como o alicerce necessário para a constituição de novos campos conceituais e, consequentemente, para o processo de conceituação das estruturas matemáticas.

Considerações finais

A proposta desse texto consistiu em compreender como as situações de aprendizagem propostas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental refletem na aprendizagem dos conceitos Matemáticos. Para tanto, apresentou-se a Teoria dos Campos Conceituais e se estabeleceu a diferenciação entre o campo aditivo e o campo multiplicativo. Na sequência apresentou-se o resultado de pesquisas fundamentadas nessa teoria as quais indicaram sobre a importância de a proposta pedagógica dos Anos Iniciais oferecer situações de aprendizagem diversificadas que perpassem, tanto o campo aditivo quanto o multiplicativo.

Os estudos correlatos trouxeram para o debate aspectos importantes a serem considerados, na medida em que indicam que as práticas pedagógicas apresentam abordarem parcial do campo multiplicativo e, ao mesmo tempo, alertam para a precariedade da formação dos professores em relação ao processo de conceituação da matemática. Além disso, a perspectiva histórica e os aspectos conceituais indicam o campo multiplicativo em conjunto com o campo aditivo como estruturantes da Aritmética, da Geometria e da Álgebra.

O contato com situações envolvendo diferentes complexidades, possibilitará a ampliação do sistema conceitual na mendida em que exigirá do estudante um maior investimento cognitivo para compreendê-las e para ter sucesso ao resolvê-las. Assim, fica o desafio para os professores, sejam do Ensino Fundametal ou do Ensino Médio, de conhecerem mais sobre o processo de aprendizagem da Matemática como possibilidade para propor situações de aprendizagem diversificadas capazes de auxiliar os estudantes na processo de conceituação.

Referências

ALVES, Vanessa da Silva; LIMA, Rosemeire Roberta de. Reflexões acerca da construção do conceito de número racional no Ensino Fundamental. *In*: COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, 6., 2012, São Cristóvão. *Anais […]*. São Cristóvão: EDUCON, 2012. Eixo 6: Educação e ensino de ciências exatas e biológicas, n. 120. Disponível em: http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/10179. Acesso em: 21 set. 2019.

CURI, Edda; PIRES, Célia Maria Carolino. A formação matemática de professores dos Anos Iniciais do ensino fundamental face às novas demandas nacionais. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. *Anais […]*. Recife: UFPE, 2004. Mesa redonda. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR20.pdf. Acesso em: 10 out. 2019.

FÁVERO, Maria Helena; NEVES, Regina da Silva Pina. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, São Paulo, v. 20, n. 37, p. 33-67, jan./jun. 2012.

GUIMARÃES, Karina Perez. *Processos cognitivos envolvidos na construção de estruturas multiplicativas*. 2004. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

LIMA, Rosemeire Roberta de. *Campo multiplicativo*: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera Lucia. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MOREIRA, Marco Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 7, n. 1, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html. Acesso em: 11 dez. 2003.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. *Introdução à Educação Matemática*: os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM, 2001.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender*. São Paulo: Melhoramentos: Editora da USP, 1978.

ROSA, Marlusa Benedetti da. *A inclusão da instituição escola na cultura digital e a construção de novos paradigmas a partir da iniciação científica na educação básica*. 2013. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

SOUSA, Célia Maria Gomes de; FÁVERO, Maria Helena. Análise de uma situação de resolução de problemas de física, em situação de interlocução entre um especialista e um novato, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. *Revista Investigações em Ensino de Ciênicas*, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 55-75, 2002. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/570/362. Acesso em: 12 dez. 2003.

STAREPRAVO, Ana Ruth. *A multiplicação na Escola Fundamental I*: análise de uma proposta de ensino. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

STAREPRAVO, Ana Ruth. Usando jogos para ensinar estruturas multiplicativas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais […]*. Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1530_708_ID.pdf. Acesso em: 21 set. 2019.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. *Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar*: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

VERGNAUD, Gerard. Piaget e Vygotsky: convergências e controvérsias. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, v. 2, p. 75-83, nov. 1993.

VERGNAUD, Gerard. A teoria dos campos conceituais. *In*: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996a. p. 155-191.

VERGNAUD, Gerard. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, v. 4, p. 9-19, jul. 1996b.

https://doi.org/10.22456/2595-4377.98802