O Supermultiplicador Sraffiano, a Instabilidade Fundamental de Harrod e o Dilema de "Oxbridge"

The Sraffian Supermultiplier, Harrod's Fundamental Instability and the "Oxbridge" Dilemma

Franklin Serrano[a]
Fábio Freitas[a]
Gustavo Bhering[a]

Resumo: O trabalho compara o modelo de crescimento liderado pela demanda do supermultiplicador sraffiano com os principais modelos de crescimento pós-keynesianos, usando um esquema analítico simples. Demonstramos que: o modelo permite o ajustamento da capacidade à tendência da demanda, em contraste com o modelo de Harrod; que nos modelos de Cambridge há a tendência oposta de ajustamento da demanda à capacidade produtiva; e que o supermultiplicador mantém a hipótese de distribuição exógena, mas sem a necessidade de ter que supor que o grau efetivo de utilização da capacidade é endógeno, como nos modelos baseados em Kalecki e Steindl.

Palavras-chave: Demanda efetiva. Crescimento. Supermultiplicador sraffiano.

Abstract: The paper compares and contrasts the sraffian supermultiplier demand led growth model with key post-keynesian models, using a very simple analytical framework. We demonstrate that: the supermultiplier model allows capacity to adjust to demand, in sharp contrast with the Harrodian model; that in the Cambridge models we have the opposite tendency of aggregate demand to adjust to capacity; and that the supermultiplier preserves the exogeneity of the distribution parameter without the need to assume that the actual degree of capacity utilization is endogenous in the longer run, typical of models based in Kalecki and Steindl´s ideas.

Keywords: Effective demand. Economic growth. Sraffian supermultiplier.

JEL Classification: E11; E12; O41.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é comparar e contrastar o modelo de crescimento liderado pela demanda do supermultiplicador sraffiano com os principais modelos

a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Instituto de Economia (IE). Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

DOI: dx.doi.org/10.22456/2176-5456.78286

de crescimento pós-keynesianos. A comparação usa um esquema analítico extremamente simples que realça as diferenças centrais nas hipóteses e variáveis de ajuste de cada modelo. No modelo do supermultiplicador sraffiano, a distribuição é dada exogenamente a partir dos elementos realçados pela retomada da abordagem clássica do excedente (EATWELL; MILGATE, 1983), o investimento das empresas é induzido pelo princípio de ajuste do estoque de capital (acelerador flexível) e são os gastos autônomos que não criam capacidade que lideram o crescimento, hipóteses inspiradas por Garegnani (2015).[1] Mostraremos que essas hipóteses do modelo permitem o ajustamento da capacidade à tendência da demanda, em contraste com o modelo de Harrod e seu princípio da instabilidade fundamental.

Mostramos, também, que, nos modelos de Cambridge (ROBINSON, 1962; KALDOR, 1970; KHAN, 1959), a tendência à utilização normal da capacidade requer a tendência oposta: o ajustamento da demanda à capacidade produtiva pelo mecanismo de poupança forçada.[2] Ao mesmo tempo, o supermultiplicador sraffiano mantém a hipótese de distribuição exógena e, portanto, a ausência de relação necessária entre distribuição e crescimento a longo prazo como nos modelos de Oxford - baseados em Kalecki (1971) e Steindl (1952, 1979) -, mas sem a necessidade, inevitável em modelos de investimento autônomo e distribuição exógena, de ter de supor que o grau efetivo de utilização da capacidade é endógeno e não tende a seu nível normal.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma: na segunda seção discutimos o problema da instabilidade fundamental da taxa garantida de Harrod; na terceira apresentamos os dois tipos de modelos de crescimento pós-keynesianos que foram desenvolvidos a partir dos resultados de Harrod; na quarta discutimos o supermultiplicador sraffiano; e na quinta traçamos as considerações finais. Há também dois apêndices matemáticos que contém, respectivamente, provas formais da instabilidade fundamental de Harrod e da estabilidade dinâmica do supermultiplicador sraffiano.

2 Harrod e a Instabilidade Fundamental da Taxa Garantida

Harrod (1970) propõe um modelo de crescimento econômico baseado em um casamento do princípio da aceleração e a teoria do multiplicador. Isso permiti-

1 O modelo foi originalmente proposto independentemente (com algumas diferenças) por Bortis (1979) e Serrano (1995a, 1995b).

2 Aqui, usamos o termo “poupança forçada” para nos referirmos ao mecanismo de ajustamento da demanda efetiva à capacidade através da distribuição. No caso de um excesso de demanda, há um aumento do nível de preços que reduz o salário real e, consequentemente, o consumo, eliminando o excesso de demanda. No caso oposto, de excesso de oferta, a queda dos preços provoca um aumento do salário real (e uma “despoupança forçada”), aumentando o consumo e eliminando o excesso de oferta.

ria ao autor captar o caráter dual do investimento. O multiplicador trata do investimento como um componente da demanda agregada da economia, enquanto o acelerador leva em conta o efeito do investimento como gerador de capacidade produtiva (oferta).[3] Harrod procura, então, estudar qual a condição para que ocorra um crescimento equilibrado, isto é, em que circunstâncias os efeitos demanda e capacidade do investimento podem ser conciliados, permitindo o equilíbrio entre demanda agregada e capacidade produtiva.

A condição mencionada vem da equação fundamental de Harrod, que pode ser derivada da seguinte maneira: a partir da identidade entre investimento e poupança agregados quando o mercado de produto está em equilíbrio, podemos obter, com algumas manipulações,[4] a seguinte expressão:

$$\frac{I}{K} \equiv \frac{S}{Y}\frac{Y^*}{K}\frac{Y}{Y^*} \tag{1}$$

Esse truísmo nos diz que a taxa de crescimento do estoque de capital (I/K) é idêntica à propensão média a poupar (S/Y) multiplicada pelo inverso da relação normal capital-produto ($Y^*/K = 1/v$) e pelo grau efetivo de utilização da capacidade ($Y/Y^* = u$).

No modelo de Harrod, a propensão média a poupar é igual à (e totalmente determinada pela) propensão marginal a poupar, *s*, dada exogenamente ao modelo ($S/Y = s$). Isso decorre do fato de que, na especificação de seu modelo, Harrod não considerou a existência de consumo agregado autônomo.[5] Devido a essa hipótese, o nível do produto é determinado pela demanda efetiva através de:

$$Y = \frac{I}{s} \tag{2}$$

em que I é o nível de investimento e s é a propensão marginal (e média) a poupar. Nesse modelo, para um dado valor da propensão marginal a poupar, a taxa efetiva de crescimento da economia (g) é igual à taxa de crescimento do investimento (pois o consumo cresce sempre na mesma proporção que o investimento). Além disso, a taxa de crescimento do estoque de capital (g_k) também sempre segue, com alguma defasagem, a taxa de crescimento do investimento líquido. A relação entre a taxa de crescimento do investimento g e do estoque de

3 Neste trabalho, somente entenderemos por investimento aqueles gastos capazes de gerar capacidade produtiva para o setor privado da economia, ou seja, suas compras de novos meios de meios de produção produzidos. Vamos ignorar o investimento privado residencial e o das empresas estatais e da administração pública.

4 Basta dividir ambos os membros da identidade pelo estoque de capital e depois desdobrar, tautologicamente, o segundo membro (S/K) nas três parcelas apresentadas na equação 1. Para simplificar, todas as magnitudes estão expressas em termos líquidos e não brutos. Estamos supondo também que não há variação involuntária de estoques.

5 Na verdade, Harrod (1948, 1970) chega a considerar a existência de gastos autônomos, como as exportações. Todavia, ele não considerou a hipótese desses gastos poderem crescer, no longo prazo, a uma taxa determinada independentemente. A ausência dessa hipótese é crucial para a obtenção dos resultados de seu modelo.

capital g_k é dado por $g_k = g_{k(-1)}(1+g)/(1+g_{k(-1)})$[6], que está sempre tendendo para $g_k = g$. Assim, da equação 1, podemos obter a seguinte equação:

$$g = \frac{s}{v}u \tag{3}$$

Da equação 3 podemos deduzir a equação fundamental de Harrod (1970, p. 17) fazendo $u = 1$ (grau normal de utilização da capacidade) e ficando com:

$$g_w = \frac{s}{v} \tag{4}$$

Essa equação expressa a condição para que ocorra um crescimento equilibrado entre demanda e capacidade no modelo de Harrod. O autor denominou taxa garantida, g_w, a taxa particular que permite esse tipo de crescimento. A taxa garantida é uma função positiva da propensão marginal a poupar e negativa da relação normal capital-produto, determinadas exogenamente. Como se pode notar, ela reflete apenas as condições de oferta, apesar de que uma das pretensões de Harrod era estender para o longo prazo (quando capacidade produtiva varia) algumas das conclusões keynesianas desenvolvidas, originalmente, em um contexto de curto prazo. Na verdade, como sugerido por Serrano (1995a, p. 68-71), a taxa garantida deve ser entendida como uma condição para a validade da Lei de Say no longo prazo.[7] Nota-se que a taxa garantida não é a taxa efetiva de crescimento da demanda, que, como vimos, é determinada pela taxa de crescimento do investimento nesse modelo. A taxa garantida também não representa a taxa a que realmente cresce o estoque de capital e o produto potencial, já que a taxa de crescimento do estoque de capital, como vimos, tende a crescer à mesma taxa em que cresce o investimento. Na realidade, a taxa garantida de Harrod representa apenas um limite superior para a taxa de crescimento do produto potencial (com utilização normal da capacidade), que só ocorreria se o investimento fosse, em todos os períodos, exatamente igual à (e determinado pela) poupança potencial da economia.

Apesar das referências ao multiplicador e acelerador, o equilíbrio entre capacidade e demanda descrito pela trajetória de crescimento dada pela taxa garantida só ocorreria se o crescimento da demanda se ajustasse sempre e continuamente

6 O estoque de capital no início do período t é dado por $K=K_{-1}+I_{-1}$. Portanto, $g_k = \frac{I_{-1}}{K_{-1}} = \frac{I_{-2}}{K_{-2}} \frac{1+g}{1+g_{k-1}} = g_{k-1}\frac{1+g}{1+g_{k-1}}$.

7 De Serrano (1995a, p.68): "The warranted rate is derived by checking what the expected growth rate of the economy should be in order that the economy automatically generates enough induced consumption and induced investment to buy the whole increment of output and capacity and hence guarantee the continuing full utilization of the expanding newly created capacity." Em outras palavras, quando o crescimento ocorre à taxa garantida, a propensão marginal a gastar (propensão marginal a consumir mais propensão marginal a investir) é igual a um. Dessa forma, a condição de que a taxa de crescimento seja igual à garantida é a condição de validade da Lei de Say.

ao crescimento prévio da capacidade produtiva. Como Harrod rejeita a Lei de Say, conclui corretamente que não há motivo nenhum para a economia crescer à taxa garantida. Se por algum motivo o investimento na economia e (posteriormente) no estoque de capital crescer a uma taxa g exógena diferente de g_w, o grau de utilização será diferente do normal ($u \neq 1$). Nota-se que a taxa garantida de Harrod é a *única* taxa na qual investimento, demanda e capacidade produtiva (oferta) crescem de forma equilibrada ($u=1$).

Como a taxa garantida de Harrod representa apenas o limite ao crescimento dado pela poupança potencial, é natural (e se segue da equação 3) que uma taxa de crescimento efetiva de crescimento do investimento (e do produto) acima da taxa garantida ($g>g_w$) leve a uma situação de sobreutilização da capacidade ($u>1$) e que uma taxa de crescimento do investimento abaixo da garantida ($g<g_w$) leve a uma subutilização da capacidade ($u<1$).

Harrod demonstrou adicionalmente que, se o investimento for induzido, no sentido de seguir alguma versão do acelerador – ou princípio de ajuste do estoque de capital (MATTHEWS, 1960) –, qualquer outra taxa de crescimento do investimento diferente da garantida na realidade provoca desequilíbrios cumulativos. Se supusermos adicionalmente que o investimento agregado é totalmente induzido e sensível ao grau de utilização da capacidade, vemos com clareza o que ele chamou de princípio da instabilidade fundamental. Frente a uma sobreutilização da capacidade ($u>1$), as empresas em conjunto reagem aumentando seus investimentos, enquanto que, diante de uma situação de subutilização da capacidade ($u<1$), tendem a reduzir os investimentos. Nos dois casos, a reação das empresas faria com que a taxa efetiva de crescimento se afaste cada vez mais da taxa garantida (teríamos, respectivamente, $g>>g_w$ e $g<<g_w$).

Nota-se que, embora uma dada taxa de crescimento dos investimentos g leve a um grau de utilização da capacidade estável, pois o estoque de capital tenderá a crescer à mesma taxa que cresce a demanda agregada e o investimento, cada vez que muda a taxa de crescimento, o grau de utilização correspondente vai mudar de valor. Isso ocorre porque o efeito inicial de um aumento de g é aumentar a demanda mais do que a capacidade, pois o investimento é sempre, primeiro, um aumento da demanda e, só posteriormente, quando os novos bens de capital entram em operação, implica um aumento da capacidade produtiva (e de forma correspondente, uma queda de g faz inicialmente o crescimento da demanda cair antes da redução do crescimento da capacidade). Assim, cada rodada de redução (ou aumento) da taxa de crescimento do investimento devido a uma queda (aumento) do grau de utilização da capacidade levaria a um novo grau de utilização da capacidade menor (maior).

Chegamos, assim, ao problema da instabilidade fundamental de Harrod: qualquer divergência entre g e g_w, por menor que seja, tende a se ampliar pelo mecanismo descrito. A taxa garantida de crescimento de Harrod é instável, o que implica que o desajuste entre demanda agregada e capacidade seria a regra no longo prazo. Nota-se que o motivo pelo qual Harrod considerava sua demonstração da instabilidade como fundamental era porque o ajustamento vai na direção errada. Por exemplo, quando a taxa efetiva de crescimento está abaixo da garantida e o grau de utilização está baixo, a restauração do crescimento à taxa garantida requereria um aumento do crescimento do investimento, mas os sinais de mercado (o grau de utilização baixo) implicam que haverá um incentivo à redução do crescimento do investimento privado.[8]

3 Oxbridge

As teorias pós-keynesianas de crescimento surgiram como resposta a algumas das questões colocadas por Harrod a partir de seu modelo aqui discutido parcialmente. A principal refere-se ao problema da instabilidade fundamental. O modelo de Harrod era violentamente instável, o que o tornava inadequado para a explicação e a análise dos processos reais de crescimento econômico. Além disso, mesmo que se ignorasse ou se contornasse de alguma forma a questão da instabilidade, permaneceria o fato de que, no modelo de Harrod, a taxa garantida depende da propensão marginal a poupar e o crescimento a essa taxa implicaria a validade da Lei de Say, o que era evidentemente contrário a qualquer tentativa de estender o princípio da demanda efetiva para um contexto de crescimento.

Diante desses problemas, as principais vertentes pós-keynesianas da teoria do crescimento adotaram como hipótese comum de trabalho a ideia de o investimento agregado ser um gasto autônomo.[9,10] Com a hipótese de investimento autônomo, as teorias pós-keynesianas conseguem contornar o problema da instabilidade fundamental de Harrod, pois, como vimos, o mecanismo que provoca a instabilidade tem como uma de suas premissas o investimento ser totalmente induzido com o objetivo de ajustar a capacidade à demanda.

Por outro lado, o consumo continua a ser considerado um gasto totalmente induzido pela renda tal qual no modelo de Harrod. Os autores pós-keynesianos especificam de maneira diferente a equação 3 de modo a explicitar a relação entre propensão a poupar e distribuição de renda. Com efeito, podemos supor, para simplificar, que os salários são totalmente consumidos e que os capitalistas pou-

8 Para uma discussão formal da instabilidade fundamental de Harrod, ver Apêndice A.

9 Para os autores pós-keynesianos, o nível e a taxa de crescimento do investimento são determinados exogenamente por fatores financeiros (margens de lucro, taxa de juros, disponibilidade de crédito), psicológicos (incerteza forte, *animal spirits*, etc.), por fatores relacionados ao processo de concorrência capitalista (mudança tecnológica, etc.) e/ou por fatores históricos e políticos.

10 Para uma discussão mais detalhada acerca da hipótese de investimento autônomo, ver Serrano (2001).

pam uma parcela exogenamente fixada dos lucros, P ($s_p = S/P>0$). Sabendo disso, podemos reorganizar o lado direito da equação geral 1 para obter:

$$g = s_p(1-\omega)\,Ru \tag{5}$$

em que $(1\text{-}\omega) = P/Y$ é a participação dos lucros no produto e $R = 1/v$ é a taxa máxima de lucro.[11] Por outro lado, a taxa normal de lucro é $r = (1\text{-}\omega)R$, com o que chegamos à equação “Oxbridge”:

$$g = s_p ru \tag{6}$$

Essa equação pode ser usada para estudarmos e compararmos as duas principais vertentes da teoria pós-keynesiana, as teorias de Cambridge e a que chamaremos (seguindo Serrano (1995a)) de teoria de Oxford. Como as duas vertentes, na mesma linha de Harrod, não admitem a existência de consumo autônomo, então a parcela da poupança nos lucros, s_p, é um dado exógeno. Além disso, como discutido, em contraste com Harrod, ambas as teorias partem da hipótese da existência de investimento autônomo cuja taxa de crescimento, g, é determinada exogenamente e é também a taxa que determina o crescimento do estoque de capital e da capacidade produtiva. Dadas essas hipóteses, o problema que se coloca é: qual das duas variáveis, r ou u, no segundo membro da equação 6, é determinada pela teoria? É nessa resposta que as teorias pós-keynesianas de Cambridge e de Oxford se diferenciam uma da outra.

Vejamos primeiro a teoria de Cambridge. Os autores ligados a essa teoria[12] acreditavam que a longo prazo existiria uma tendência das economias a uma utilização normal da capacidade produtiva ($u=1$). Para que isso ocorra é necessário que haja um ajuste entre demanda agregada e capacidade produtiva. Como a taxa g de crescimento do investimento exógeno determina, autonomamente, o crescimento da capacidade produtiva, a única forma de ocorrer tal ajuste, dentro das hipóteses da teoria, é por meio de uma adequação da demanda agregada à capacidade produtiva. Na teoria de Cambridge, a demanda se ajusta à capacidade através de mudanças na distribuição de renda (r, na Equação 6 acima), que faz o consumo agregado se adaptar ao tamanho da capacidade produtiva que sobra, uma vez atendidos os gastos em investimento.[13]

Assim, quando, por acaso, o crescimento da demanda fosse maior que o crescimento da capacidade (g), haveria uma tendência ao aumento da taxa normal de lucro através de uma inflação de demanda que reduziria, através do conhecido mecanismo da poupança forçada, a parcela dos salários na renda e que

---

11 Comparando com a equação 1 do modelo de Harrod, podemos constatar que $s = s_p(1\text{-}\omega)$, em que $\omega = W/Y$.

12 Os principais trabalhos nessa vertente pós-keynesiana são Kaldor (1970), Robinson (1962) e Kahn (1959).

13 É importante salientar que, como em Harrod, $R = 1/v$ é dada, então as mudanças na distribuição (taxa de lucro normal) advêm totalmente de alterações da parcela do lucro no produto $(1\text{-}\omega)$.

provocaria, através do multiplicador, uma redução do consumo agregado e, portanto, da demanda agregada. Quando ocorresse a situação inversa, deveria haver uma redução da taxa normal de lucro que levaria a uma elevação da demanda agregada suficiente para fazer com que a capacidade fosse normalmente utilizada. Portanto, na teoria de Cambridge, a variável dependente na equação "Oxbridge" é a taxa normal de lucro ($r = g/s_p$ e $u = 1$). Nesse caso, qualquer aumento ou diminuição da taxa g provocaria, *ceteris paribus*, uma elevação ou redução da taxa normal de lucro respectivamente.

Já os principais autores associados à teoria de Oxford[14] não acreditavam que, pelo menos nos países desenvolvidos, a distribuição possa ser uma variável de ajuste a longo prazo. Isso acontece porque, na visão desses autores, as estruturas de mercado são predominantemente não competitivas (oligopólicas), o que faz com que o grau de monopólio e, portanto, a parcela dos lucros na renda seja um dado exógeno. Decorre disso que o mecanismo de ajuste entre demanda agregada e capacidade produtiva proposto pela teoria de Cambridge não poderia funcionar, dadas as hipóteses compartilhadas pelas duas vertentes. Em particular, no caso em que o crescimento da demanda for menor do que o da capacidade determinado independentemente, haveria uma tendência para a subutilização crônica da capacidade produtiva ($u<1$), e não para uma mudança da distribuição. Segue-se que, nos termos da equação "Oxbridge", a variável dependente seria o grau efetivo de utilização da capacidade. Aumentos ou diminuições na taxa g levariam, respectivamente, a aumentos ou diminuições do grau de utilização ($u=g/s_p r$).

Podemos agora avaliar criticamente as duas teorias pós-keynesianas. Com relação à teoria de Cambridge, é extremamente duvidosa – dos pontos de vista teórico e empírico – a capacidade do mecanismo proposto funcionar sem problemas, notadamente no caso de um excesso de capacidade. Nessas circunstâncias, teríamos que esperar uma flexibilidade para baixo dos preços e margens de lucro mesmo no longo prazo. É bem mais razoável supor que as empresas, mesmo em condições competitivas, preservam uma margem de lucro mínima e diminuem sua produção diante de uma queda da demanda, principalmente a longo prazo.

O caso de excesso de demanda agregada, por sua vez, é igualmente pouco plausível porque, nesse caso, o investimento autônomo e a demanda agregada sempre crescem tão rápido que o tamanho da capacidade produtiva nunca alcança o nível da demanda efetiva e há sempre um excesso de demanda agregado crônico a longo prazo. Esse excesso de demanda não é eliminado pelo ajustamento

14 Dentre esses autores, destacam-se, Steindl (1952, 1979), Kalecki, Hicks e o próprio Harrod. O modelo Oxford é apresentado aqui de forma muito simplificada para enfatizar a característica central que nos interessa, que é a existência de um componente autônomo na função investimento e o caráter totalmente induzido do consumo. Serrano e Freitas (2017) mostram que as versões mais modernas desse tipo de modelo apresentadas pelos neokaleckianos e autores como Marglin e Bhaduri não alteram em nada as conclusões apresentadas nesta seção.

da capacidade produtiva em relação à demanda efetiva, mas pelo mecanismo de poupança forçada ao reduzir os salários reais e a parcela dos salários no produto. É implausível que o excesso de demanda não gere alguma reação do investimento no sentido de aumentar a capacidade produtiva. A teoria de Cambridge também implica que haja uma relação inversa entre os níveis de investimento e consumo a longo prazo, coisa que não se observa empiricamente nas economias capitalistas.

Com relação à teoria de Oxford, o principal problema[15] é que é muito implausível que o investimento se mantenha autônomo a longo prazo e que as decisões de investimento não sejam afetadas por um desequilíbrio permanente entre demanda agregada e capacidade produtiva, que é o que se postula se tomamos o grau de utilização como variável de ajuste no longo prazo.

Sendo assim, a teoria pós-keynesiana do crescimento chega a um impasse, que podemos chamar de dilema de Oxbridge. Para que haja algum ajuste entre capacidade e demanda parece ser necessário aceitar o implausível mecanismo de ajuste de Cambridge. Por outro lado, se não se aceita esse mecanismo supondo a distribuição de renda exógena – como na teoria de Oxford – então, a economia não tem como ajustar a capacidade produtiva e a demanda efetiva e, portanto, o grau de utilização nunca tende ao normal.

4 O Supermultiplicador Sraffiano

Todavia, esse impasse só é real se as hipóteses compartilhadas pelas teorias pós-keynesianas não forem questionadas. Dessas hipóteses, duas são cruciais: o investimento autônomo e a ausência de consumo agregado autônomo (ou, de modo mais geral, de gastos autônomos que não geram capacidade para o setor privado).[16] Na realidade, é a hipótese de investimento autônomo a verdadeira responsável pelo impasse em questão. Decorre dela a necessidade da demanda agregada se ajustar à capacidade produtiva para manter um grau normal de utilização. Por outro lado, essa hipótese de investimento autônomo parece ser indispensável para se livrar do problema da instabilidade fundamental de Harrod. No entanto, isso não é verdade. A instabilidade fundamental da taxa garantida de Harrod não implica necessariamente a instabilidade fundamental de todas as teorias baseadas em um casamento do acelerador (investimento induzido) e do multiplicador tão

15 Não vamos discutir aqui as deficiências da teoria da distribuição baseada no grau de monopólio. Sobre isso, ver Pivetti (1991).

16 Nota-se que, no modelo de supermultiplicador original de Hicks (1950), apesar do investimento ser induzido, de maneira não muito coerente, o componente autônomo da demanda também consistia de investimentos que criavam capacidade, e, ainda por cima, arbitrariamente, se supunha que crescia à taxa natural exógena (produtividade mais crescimento da força de trabalho). O único motivo para isso era a (infundada) fé de Hicks de que um modelo de demanda efetiva só poderia servir para explicar as flutuações cíclicas de curto prazo, mas não a tendência de crescimento da economia.

logo se admita a existência de gastos em consumo (gastos finais) autônomos, cujo crescimento pode puxar um processo de crescimento liderado pela demanda.

4.1 O Consumo Autônomo e a Fração

Vamos admitir a existência de consumo agregado autônomo, Z, crescendo a uma taxa independente, z. Segue-se, dessa nova hipótese, que, ao contrário do que ocorre no modelo de Harrod e nas teorias pós-keynesianas, as propensões marginal e média a poupar não são, em geral, iguais. A propensão média a poupar (S/Y) é dada por:

$$\frac{S}{Y} = s - \frac{Z}{Y} \tag{7}$$

Na equação 7 fica claro que as duas propensões só são iguais ($S/Y = s$) na ausência do consumo autônomo ($Z = 0$). A propensão marginal apenas impõe um teto para a propensão média que, em geral ($Z > 0$), será estritamente menor do que ela.

Nota-se, também, que, embora a propensão marginal a poupar seja exógena, a propensão média a poupar depende positivamente do nível do produto. Um aumento do produto causado por um aumento do investimento diminui o peso relativo da "despoupança", representada pelos gastos em consumo autônomo, aumentando a razão entre propensão média e a (dada) propensão marginal a poupar. Isso fica mais claro se escrevermos a expressão para a propensão média a poupar em termos das variáveis independentes (s, I e Z). Como $S/Y = I/Y$ e $Y = (I+Z)/s$, então:

$$\frac{S}{Y} = \frac{I}{I + Z} s$$

$$\frac{S}{Y} = fs \tag{8}$$

em que f é o que Serrano (1995b) chama de "a fração" que corresponde à razão entre a propensão média e marginal a poupar. Pela equação 8, podemos ver que a propensão média não é mais determinada unicamente pela propensão marginal a poupar, depende também dos níveis relativos de investimento e de consumo autônomo. Assim, um aumento do investimento em relação ao aumento do gasto autônomo Z provoca uma elevação do nível e da taxa de poupança. Resulta disso que a propensão média a poupar é uma variável endogenamente determinada para qualquer valor abaixo do seu limite superior s. Assim, se existem gastos improdutivos autônomos, a propensão marginal a poupar define apenas o limite superior, e não o valor efetivo da propensão média a poupar. Abaixo desse limite é o nível (relativo) de investimento que determina (através de mudanças na fração *f*) a taxa de poupança da economia.

4.2 A Propensão Marginal a Investir e o Supermultiplicador

Vejamos agora o que ocorre, em uma economia na qual existe consumo autônomo, quando supomos adicionalmente que o investimento a longo prazo é induzido. Nesse caso, podemos definir como h uma dada propensão marginal a investir, ou taxa de investimento:

$$\frac{I}{Y} = h \tag{9}$$

O nível do produto, no caso em que existem gastos autônomos e o investimento produtivo é induzido, é dado pelo supermultiplicador, que leva em conta tanto o consumo induzido quanto o investimento induzido:

$$Y = \frac{Z}{s-h} \tag{10}$$

Nesse modelo, dada a propensão marginal a poupar e a propensão a investir, a demanda efetiva e a economia vão crescer à taxa de crescimento do gasto em consumo autônomo, z.

Além disso, na presença de gastos em consumo autônomos e investimento induzido, temos que a propensão média a poupar é inteiramente determinada pela propensão a investir (para qualquer valor da propensão a investir menor que *s*). Isso é facilmente demonstrável. Basta usar essa equação do supermultiplicador para determinar a parcela do consumo autônomo no produto:[17]

$$\frac{Z}{Y} = s - h \tag{11}$$

Substituindo essa equação na equação da taxa de poupança, temos:

$$\frac{S}{Y} = s - (s - h)$$

$$\frac{S}{Y} = h \tag{12}$$

17 A parcela do gasto autônomo é, por definição, igual a um menos a parcela do consumo induzido menos a parcela do investimento induzido, isto é, Z/Y= 1-c-h . Como s=1-*c*, temos que *Z/Y*=s-h.

Vemos que nesse modelo a propensão média a poupar é inteiramente determinada pela propensão a investir h, mesmo com a propensão marginal a poupar sendo exógena.[18] Juntando esses resultados, nesse modelo de supermultiplicador, podemos reescrever a equação 1 como:

$$z = \frac{h}{v} u \tag{13}$$

4.3 A Estabilidade Fundamental do Ajustamento da Capacidade à Demanda

Nessas circunstâncias, devido à presença de gastos autônomos que não geram capacidade e crescem a uma taxa independente z, o fato de o investimento ser induzido não leva à instabilidade fundamental como no modelo de Harrod. Pelo contrário, esse modelo de supermultiplicador com consumo autônomo é fundamentalmente estável, pois, ao contrário do modelo de Harrod, o ajuste se dá na direção correta.

No caso de Harrod, se inicialmente a taxa de crescimento do investimento estiver acima da taxa garantida dada por s/v, o grau de utilização estará acima do normal; e caso a taxa de crescimento do investimento estiver abaixo da taxa garantida, o grau de utilização estará abaixo do normal. Se o investimento for induzido, de partida o ajuste está indo na direção errada, pois, com a sobreutilização, o crescimento do investimento deve aumentar (assim como, com a subutilização, o crescimento do investimento deve diminuir), o que fará o grau de utilização aumentar (diminuir) ainda mais como vimos. No caso do supermultiplicador sraffiano, o crescimento à taxa garantida de Harrod continuará sendo instável, pois corresponde apenas a um limite superior das taxas de crescimento (com utilização normal da capacidade) factíveis. Porém, no supermultiplicador, no qual a taxa de crescimento da tendência da demanda será dada pela taxa de crescimento dos gastos autônomos z, o crescimento da economia a essa taxa será fundamentalmente estável. Se o crescimento esperado da tendência da demanda g^e estiver inicialmente acima dessa taxa z, haverá uma subutilização da capacidade instalada e uma tendência à sobreutilização da capacidade no caso oposto, o que dá o sinal na direção correta para a mudança do investimento induzido.[19]

18 Outra maneira de chegar ao mesmo resultado é através da equação 8, que expressa a propensão média a poupar como dependente da propensão marginal multiplicada pela fração entre a propensão média e a marginal a poupar ($I/(I+Z)$). Esse termo pode ser reescrito como $I/Y/(I/Y + Z/Y)$ ou $h/(h + Z/Y)$. No entanto, sabemos pela fórmula do supermultiplicador que a parcela dos gastos autônomos no produto é igual a (s-h), logo $I/(I+Z)$ = h/(h + (s-h)) = h/s. E vemos que, quando o investimento é induzido, a razão entre a propensão média e marginal a poupar é dada pela razão entre a propensão a investir e a propensão marginal a poupar. Porém, isso é a mesma coisa que dizer que a taxa de investimento é que determina a propensão média a poupar, pois: $S/Y=(I/(I+Z)).s$; $S/Y = fs$; $S/Y = (h/s)s$; $S/Y = h$.

19 Estamos agora supondo que a taxa de investimento não é mais exógena e responde à taxa de crescimento esperada da demanda.

No primeiro (segundo) caso, a revisão da taxa de crescimento esperada para baixo (para cima) levará a uma tendência da taxa de investimento ser reduzida (aumentada), com o investimento crescendo menos (mais) do que a demanda agregada, o que fará a capacidade tender a crescer menos (mais) que a demanda.

Por exemplo, suponha-se que, partindo de uma situação em que o grau de utilização da capacidade é igual ao normal, a taxa z de crescimento do consumo autônomo se reduz permanentemente. Essa redução diminuirá na mesma extensão a taxa de crescimento do produto g para propensões marginais a consumir e a investir dadas.

O grau efetivo de utilização da capacidade se reduzirá ($u<1$), pois inicialmente a demanda agregada vai começar a crescer menos e, só posteriormente, a taxa de crescimento da capacidade produtiva e do estoque de capital se reduzirá a essa taxa menor. O crescimento mais lento da capacidade ocorrerá quando se materializar o efeito capacidade da taxa de crescimento mais lenta do nível de investimento que, para uma dada taxa de investimento induzido h, vai crescer a mesma taxa mais reduzida de crescimento dos gastos autônomos, reduzindo igualmente a taxa de crescimento do estoque de capital. Quando a taxa de crescimento do estoque de capital se adaptar a essa taxa de crescimento menor do produto, o grau de utilização vai se estabilizar a um nível inferior ao normal, de acordo com a equação 13.

No entanto, é razoável supor que, ao longo do tempo, a própria taxa de investimento induzido h se reduzirá em resposta à subutilização da capacidade produtiva e/ou à redução da taxa de crescimento da demanda. Vamos supor que a taxa de investimento se reduza gradualmente devido à menor taxa de crescimento da demanda.[20] Essa redução da propensão marginal a investir terá dois efeitos: inicialmente reduzirá adicionalmente a demanda agregada e o produto, reduzindo ainda mais o grau de utilização da capacidade; posteriormente, a redução da taxa de investimento reduzirá a taxa de crescimento do estoque de capital e da capacidade produtiva.

No entanto, a presença dos gastos autônomos crescendo a uma taxa exógena implica que a taxa de crescimento da demanda agregada e do produto seja reduzida menos que proporcionalmente à queda da taxa de crescimento do investimento (senão a taxa de investimento não teria sido reduzida), enquanto a queda posterior do crescimento do estoque de capital será igual à redução do crescimento do investimento. Isso significa que o grau de utilização eventualmente começará a se elevar novamente, pois, embora a demanda agregada esteja crescendo ainda

---

20 Em modelos com o investimento induzido, a ideia central é que os investidores tentam ajustar o tamanho do estoque de capital à tendência da demanda. Isso implica que o investimento vai responder a variações na demanda esperada e ao grau efetivo de utilização da capacidade. Existem várias maneiras de representar esse processo de forma bastante simplificada em termos formais em um modelo de supermultiplicador. Uma opção é supor que a taxa de investimento reage de forma linear a desvios do grau de utilização em relação ao nível normal. Outra, mais simples, é supor que a taxa de investimento reage linearmente a mudanças na taxa de crescimento esperada da demanda. Freitas e Serrano (2015) usam a primeira opção. Neste texto, usamos a segunda.

menos, a redução final do crescimento do estoque de capital é ainda maior – o que seria impossível se não houvesse o componente de consumo autônomo.

O processo descrito continuará ocorrendo enquanto o grau de utilização estiver abaixo do seu nível normal e só termina quando a taxa de investimento induzido tiver sido reduzida o suficiente para o nível que permita que, ao grau de utilização normal, a taxa de crescimento do estoque de capital se adapte à taxa de crescimento mais baixa dos gastos autônomos.

O mesmo processo ocorrerá simetricamente na direção contrária no caso de uma elevação da taxa de crescimento dos gastos autônomos z. Teríamos, então, uma sobreutilização inicial da capacidade e aumentos graduais na taxa de investimento h induzidos pelo aumento do crescimento da demanda agregada que inicialmente ampliariam ainda mais a sobreutilização da capacidade. Posteriormente, a aceleração do crescimento da capacidade em relação ao da demanda agregada advinda de uma maior taxa de investimento gradativamente faria o grau de utilização tender de volta ao seu nível normal com o nível e a taxa de crescimento da capacidade produtiva da economia adaptados à maior taxa de crescimento dos gastos autônomos z.

O crescimento liderado pela expansão dos gastos autônomos Z é fundamentalmente estável porque a reação do investimento induzido ao desequilíbrio entre demanda agregada e capacidade produtiva gera uma redução maior do crescimento da capacidade em relação ao da demanda, no caso de queda do crescimento da demanda e subutilização, e um aumento maior da expansão da capacidade do que da demanda, no caso de aumento do crescimento da demanda, e sobreutilização da capacidade. A economia, portanto, vai na direção correta.

No modelo de Harrod, essa reação causava instabilidade porque, não existindo consumo autônomo ($Z = 0$), o crescimento da demanda aumentava ou diminuía sempre na mesma proporção que o crescimento (necessariamente posterior) da capacidade. A ausência de consumo autônomo tornava impossível uma variação na taxa de investimento, que era univocamente determinada pela propensão marginal a poupar. Já no modelo do supermultiplicador sraffiano, a propensão média a poupar depende inteiramente da propensão a investir. Como esta aumenta em resposta à sobreutilização da capacidade, o mesmo ocorre com a propensão média a poupar, que acaba se ajustando à taxa de investimento induzido requerida para ajustar a capacidade à demanda agregada.

Na equação 8, dadas s e v, as variações da taxa de investimento h alteram a "fração" $f = [I/(I+Z)]$ no montante necessário para que a economia endogenamente gere a taxa de poupança requerida pela expansão da demanda agregada e do investimento, fazendo com que o grau de utilização tenda a um. Nesse modelo, na linguagem de Harrod, a taxa efetiva de crescimento é dada pela expansão dos gastos autônomos em consumo e, de certa forma é a taxa garantida que se ajusta à taxa efetiva via variações da propensão média (mas não a marginal) a poupar, causadas pelas variações induzidas da taxa de investimento. A conclusão é que o casamento entre o acelerador (investimento induzido) e o multiplicador (consumo induzido) proposto por Harrod afinal dá certo, mas somente na presença de um terceiro elemento (como em tantos outros casos), o gasto autônomo que não cria capacidade.

4.4 Estabilidade Dinâmica e Limites do Crescimento Liderado pela Demanda

Na discussão da seção anterior foi feita uma alusão ao ajustamento gradual da propensão marginal a investir em relação a discrepâncias entre o grau efetivo de utilização da capacidade u e seu nível normal ou planejado (u=1). A questão é que a estabilidade fundamental do ajustamento da capacidade à demanda descrita é certamente uma condição necessária, mas não suficiente para o regime de crescimento liderado pela demanda descrito pelo modelo do supermultiplicador sraffiano. É o ajustamento parcial ou gradual da taxa de investimento que provê uma condição suficiente.

Se, por exemplo, diante de um aumento da taxa de crescimento dos gastos autônomos z e o consequente aumento do grau de utilização efetivo da capacidade, a taxa de investimento induzido reage muito e aumenta rapidamente, é possível que o processo de ajustamento da capacidade à demanda se torne dinamicamente instável porque, embora o ajuste esteja indo na direção correta, sua intensidade pode ser excessiva e o crescimento (ou queda) do investimento induzido ser excessivo. Se a expansão da taxa de investimento induzida for muito elevada em um período curto, é bem possível que o crescimento da demanda agregada fique tão elevado que seja impossível que a oferta (produção e capacidade) o acompanhe no mesmo ritmo. Se a taxa de investimento induzido, somada à propensão marginal a consumir, se tornarem uma propensão marginal agregada a gastar maior que um, qualquer gasto autônomo positivo induz uma demanda agregada total infinita. A estabilidade dinâmica do supermultiplicador requer que isso não ocorra. Por isso, o modelo requer a hipótese adicional de que as mudanças da taxa de investimento induzidas pelas mudanças nas taxas efetivas de crescimento da economia sejam graduais.

A ideia é que a taxa de investimento não dependa da taxa de crescimento efetiva do produto em um dado período g, mas sim da tendência esperada de crescimento a longo prazo da economia g^e. Quando muda a taxa de crescimento efetiva do produto, a tendência esperada da taxa de crescimento de longo prazo g^e será revisada, mas apenas parcial e gradualmente porque as firmas entendem que a demanda flutua e nem toda variação da demanda é permanente, porque em uma economia que usa capital fixo, o objetivo das firmas é ajustar a capacidade produtiva à demanda durante a vida útil do equipamento, e não a cada momento do tempo. Esse tipo de ajustamento gradual das expectativas de longo prazo da demanda é conhecido como "acelerador flexível", em contraposição ao chamado "acelerador rígido", no qual as empresas tentam ajustar continuamente a capacidade à demanda e tomam qualquer variação da demanda como permanente. Esse ajustamento gradual da taxa de investimento pode ser formalizado da seguinte forma:[21]

$$h=vg^e \tag{14}$$

$$g^e=b\,(g_{-1}-g^e_{-1})+g^e_{-1} \tag{15}$$

em que g^e é a taxa de crescimento esperada da demanda e b é um coeficiente suficientemente pequeno (b=0 significaria que a taxa de investimento é exógena; b=1 seria o caso do acelerador rígido; b positivo e relativamente pequeno é o caso do acelerador flexível).

Formalmente, uma condição suficiente para a estabilidade dinâmica do processo seria que a propensão marginal agregada a gastar, tanto em consumo quanto em investimento induzido, na vizinhança da posição em que a capacidade está ajustada à demanda, tem que ser menor que um. Para que isso ocorra, e a capacidade possa se ajustar à demanda, a propensão marginal a investir, tanto aquela requerida pela tendência de expansão da economia vz quanto aquela que surge em resposta aos desvios do grau de utilização da capacidade vb, tem que ser menor do que a propensão marginal a poupar s:

$$vz + vb< s \tag{16}$$

A hipótese de ajustamento gradual da taxa de investimento é bastante realista, dado o sucesso empírico de modelos de acelerador flexível que implicam ajustamento parcial em relação aos modelos de acelerador rígido nos quais o ajustamento é rápido. Porém, de qualquer forma, a necessidade de garantir a estabilidade dinâmica do processo mostra que existe um limite bem definido do que pode ser caracterizado como um processo de crescimento liderado pela demanda. Esse limite mostra que a economia está sempre em um regime de crescimento liderado pela demanda se a taxa de crescimento dos gastos autônomos z não for alta demais, ou seja:

$$z < \frac{s}{v} - b \tag{17}$$

No caso em que podemos supor que o modelo do supermultiplicador é dinamicamente estável, haverá uma tendência de a taxa de investimento se ajustar à taxa de crescimento requerida pela tendência de crescimento da demanda, que,

21 Para facilitar a análise formal do Apêndice B, a equação 15 será apresentada pelo seu equivalente em termos de tempo contínuo $\Delta g^e=b(g-g^e)$.

por sua vez, tenderá a ser igual à taxa de crescimento dos gastos em consumo autônomo z ($g^e=z$). Assim, teremos uma tendência a que:

$$h = vz \tag{18}$$

e também :

$$Y = \frac{Z}{s - vz} \tag{19}$$

Além disso, como no caso dinamicamente estável, o nível da capacidade produtiva também tende a se ajustar ao nível de tendência do produto, então teremos também que:

$$Y^* = KR = \frac{Z}{s - vz} \tag{20}$$

Portanto, há uma tendência de que o produto potencial da economia siga a tendência da evolução da demanda efetiva e que esta cresça à taxa de crescimento dos gastos autônomos que não criam capacidade para o setor privado (consumo autônomo no caso dessa versão do modelo).

4.5 Nem Oxford nem Cambridge

Podemos estender essa argumentação para a análise crítica das teorias pós-keynesianas de crescimento discutidas na seção anterior. Para tanto, basta lembrar que, nas duas vertentes pós-keynesianas, a parcela da poupança nos lucros, $s_p=S/P$, era dada justamente porque não existia consumo autônomo. Segue-se que, se admitirmos a existência de consumo capitalista autônomo e supormos que a propensão marginal a poupar a partir dos lucros é igual a um,[22] então teremos:

$$\frac{S}{P} = \frac{I}{P} = \frac{I}{I + Z}$$

Logo

$$s_p = \frac{I}{I + Z} \tag{21}$$

Dessa maneira, a parcela da poupança nos lucros é endógena, função dos níveis de investimento e de consumo autônomo, e, portanto, da taxa de investi-

22 Trata-se de uma hipótese simplificadora que, se relaxada, não afetaria as conclusões do argumento, basta que exista algum componente autônomo Z no consumo capitalista (SERRANO, 1995b, p. 112).

mento.[23] Podemos, então, usar a equação "Oxbridge" para determinar o valor de s_p supondo: a) que g=z; b) que a distribuição de renda (r) seja determinada exogenamente; e c) que tenda, como descrito, a uma utilização normal da capacidade (u=1). Nesse caso, da equação 6, obtemos:

$$s_p = \frac{z}{r} \tag{22}$$

Uma redução de z, por exemplo, levaria inicialmente a uma situação de subutilização da capacidade produtiva (u<1). Todavia, ao contrário do que ocorre na teoria de Oxford, essa situação não tenderia a perdurar. Eventualmente, as empresas reagiriam à referida situação diminuindo a taxa de investimento da economia, o que, ao final, permitiria o ajuste da capacidade produtiva à demanda agregada – e não o contrário, como no ajuste via distribuição defendido pela teoria de Cambridge – e reduziria proporcionalmente s_p.[24]

No modelo do supermultiplicador, a taxa de acumulação de capital segue a expansão da demanda efetiva e dos gastos autônomos e a taxa normal de lucro é determinada independentemente pelas forças discutidas pelos economistas sraffianos (GAREGNANI, 1984). Assim, não existe nenhum vínculo necessário entre crescimento econômico e distribuição de renda como na teoria de Cambridge, mesmo quando o grau de utilização se ajustou ao normal, uma vez que a proporção poupada dos lucros s_p, é a única variável endógena na equação de Oxbridge.[25]

Portanto, com base nas hipóteses adotadas[26] utilizando o supermultiplicador sraffiano, torna-se possível derivar uma tendência endógena à utilização normal da capacidade sem fazer uso do mecanismo de ajuste proposto pela teoria de Cambridge. O crescimento, no modelo do supermultiplicador, é liderado pela demanda e a capacidade produtiva que se ajusta à expansão dos gastos autônomos e da demanda efetiva, ao contrário da visão de Cambridge.

5 Considerações Finais

Neste trabalho mostramos que o princípio da instabilidade fundamental da taxa garantida s/v de Harrod é válido sob hipóteses bem gerais, pois o ajuste se dá

23 Ver nota 18. Nota-se que, para uma dada propensão marginal a investir h, podemos determinar a proporção média poupada dos lucros alternativamente como S/P = I/P = (I/Y) / (P/Y) = h / (1-w).

24 O mesmo raciocínio poderia ser desenvolvido para o caso em que g aumentasse e tivéssemos, inicialmente, u>1.

25 Além disso, é possível mostrar que não existe nenhuma relação inversa entre os níveis de consumo e de investimento, também ao contrário do que é suposto na teoria de Cambridge. Ver Serrano (1995a), capítulo 3.

26 Vale a pena lembrá-las: taxa de investimento induzido reagindo gradualmente ao grau de utilização da capacidade, existência de gasto final autônomo crescendo exogenamente ao longo do tempo e distribuição de renda dada.

na direção oposta ao equilíbrio. Vimos também que isso fez a literatura de modelos de crescimento pós-keynesianos se afastar da hipótese de que o investimento a longo prazo deve ser induzido pelo princípio do ajuste de capital. A consequente adoção da noção de investimento autônomo a longo prazo criou o dilema de Oxbridge, que consiste em ter que optar entre a tendência ao grau de utilização normal – e mesmo assim ao custo de fazer com que a demanda agregada se ajuste à capacidade – e a distribuição exógena. Posteriormente, vimos que a introdução dos gastos autônomos que não criam capacidade para o setor privado[27] permitem que a economia cresça tendo como tendência a taxa de crescimento de longo prazo desses gastos e que essa trajetória é fundamentalmente estável, ao contrário do crescimento à taxa garantida de Harrod. Adicionalmente, o modelo do supermultiplicador sraffiano supera o dilema dos modelos de Oxbridge e permite que coexistam no mesmo modelo a distribuição exógena e a tendência ao grau de utilização normal. Mostramos, também, que, sob condições realistas de ajuste gradual do estoque de capital (ou acelerador flexível), o mecanismo de ajuste desse modelo – que se dá através de mudanças endógenas na razão entre a propensão média e marginal a poupar (a fração) por meio das mudanças da propensão marginal a investir (taxa de investimento induzido) – é também estável.[28]

Referências

BORTIS, H. *Foreign resources and economic development from the early fifties to the oil crisis:* a consideration of some theoretical and empirical aspects. Fribourgo: Editions Universitaires Fribourg, 1979.

CESARATTO, S. Neo-Kaleckian and Sraffian controversies on the theory of accumulation. *Review of Political Economy*, v. 27, n. 2, p. 154–182, 2015.

EATWELL, J; MILGATE, M. *Keynes´s economics and the theory of value and distribution*. London: Duckworth, 1983.

FREITAS, F.; SERRANO, F. Growth rate and level effects, the adjustment of capacity to demand and the sraffian supermultiplier. *Review of Political Economy*, v. 27, n. 3, 2015.

GAREGNANI, P. Value and distribution in the classical economists and Marx. *Oxford Economic Papers*, v. 36, n. 2, p. 291-325, 1984.

27 Nessa versão desse modelo, aparecem como consumo autônomo, mas na realidade podem incluir adicionalmente o investimento residencial, todos os gastos do governo e as exportações.

28 Nota-se que muitos autores sraffianos não adotam esse modelo do supermultiplicador por motivos metodológicos. Para visões opostas dessa controvérsia, ver Cesaratto (2015) e Trezzini e Palumbo (2016). Por outro lado, recentemente autores neokaleckianos começaram a adotar o mesmo mecanismo de ajuste desse modelo. Ver Lavoie (2016).

GAREGNANI, P. The problem of effective demand in italian economic development: on the factors that determine the volume of investment. *Review of Political Economy*, v. 27, n. 2, 2015.

HARROD, R. *Towards a dynamic economics*. Londres: Macmillan, 1948.

HARROD, R. Dynamic theory. *In*: SEN, A. (ed.). *Growth economics*. Londres: Penguin Books, 1970, p. 17.

HICKS, J. *A contribution to the theory of the trade cycle*. Oxford: Clarendon Press, 1950.

KALDOR, N. Model of distribution. *In*: SEN, A. (ed.). *Growth economics*. London: Penguin Books, 1970.

KALECKI, M. *Selected essays on the dynamics of the capitalist economy* 1933-1970. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.

KHAN, R. Exercises in the analysis of growth. *Oxford Economic Papers*, v. 11, n. 2, 1959.

LAVOIE, M. Convergence towards the normal rate of capacity utilization in neo-Kaleckian models: the role of non-capacity creating autonomous expenditures. *Metroeconomica*, v. 67, n. 1, 2016.

MATTHEWS, R. *The trade cycle*. Cambrige: Cambridge University Press, 1960.

PARIBONI, R. *Autonomous demand and capital accumulation*: three essays on heterodox growth theory. 2015. Tese (Doutorado em Economia) - Departamento de Economia Política e Estatística, Universidade de Siena, Itália, 2015.

PIVETTI, M. *An essay on money and distribution*. London: Macmillan, 1991.

ROBINSON, J. *Essays in the theory of economic growth*. London: Macmillan, 1962.

SEN, A. (ed.). *Growth economics*. London: Penguin Books, 1970.

SERRANO, F. Long period effective demand and the Sraffian supermultiplier. *Contributions to Political Economy,* v. 14, n. 1, p. 67-90, cap. 3, 1995a.

SERRANO, F. *The sraffian supermultiplier*. 1995. Tese (PhD) – Universidade de Cambridge, Cambridge, 1995b. Disponível em: https://www.excedente.org/teses/the-sraffian-supermultiplier/. Acesso em: 11 ago. 2020.

SERRANO, F. Acumulação e gasto improdutivo na economia do desenvolvimento. *In*: FIORI, J. L.; MEDEIROS, C. A. (org.). *Polarização mundial e crescimento*. Petrópolis: Vozes, 2001.

SERRANO, F.; FREITAS, F. The sraffian supermultiplier as an alternative closure to heterodox growth theory. *European Journal of Economics and Economic Policies*: Intervention, v. 14, n. 1, 2017.

STEINDL, J. *Maturity and stagnation in american capitalism*. Oxford: Oxford University Press, 1952.

STEINDL, J. Stagnation theory and stagnation policy. *Cambridge Journal of Economics*, v. 3, n. 1, 1979.

TREZZINI, A.; PALUMBO, A. The theory of output in the modern classical approach: main principles and controversial issues. *Review of Keynesian Economics*, v. 4, n. 4, p. 503-522, 2016.

Apêndice A - Instabilidade Fundamental de Harrod

Para simplificar a análise matemática, usaremos tempo contínuo nos apêndices deste artigo. Na análise de Harrod, o produto é dado por:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{23}$$

$$C_t = cY_t \tag{24}$$

$$s = 1 - c \tag{25}$$

Logo, Y é:

$$Y_t = \frac{I_t}{s} \tag{26}$$

O crescimento do produto será igual a:

$$g_t = g_I \tag{27}$$

Se o investimento for sensível ao grau de utilização, temos:

$$g_I = x(u-1) \tag{28}$$

em que x é um parâmetro de reação positiva e $u=1$ corresponde ao grau de utilização normal. O grau de utilização, por sua vez, varia quando a taxa de crescimento do produto difere da taxa de crescimento do estoque de capital:

$$\dot{u} = u(g - g_K) \tag{29}$$

Podemos calcular a taxa de crescimento do estoque de capital como:

$$g_K = \frac{I}{K} = \frac{I}{Y}\frac{Y}{Y^*}\frac{Y^*}{K} = \frac{s}{v}u \tag{30}$$

Lembrando-nos que $I = S$, isso nos permite escrever um sistema de duas equações diferenciais:

$$g_I = x(u-1) \tag{31}$$

$$\dot{u} = u(g_I - \frac{s}{v}u) \tag{32}$$

Para calcular a estabilidade local do sistema, calculamos a matriz jacobiana e aplicamos ao ponto de equilíbrio. O equilíbrio é definido por:

$$g_I = u = 0 \tag{33}$$

$$u^* = 1 \tag{34}$$

$$g^* = g_K^* = g_I^* = \frac{s}{v} \tag{35}$$

Aplicando o equilíbrio na matriz, temos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial \dot{g}_I}{\partial g_I}\right|_{g_I^*, u^*} & \left.\frac{\partial \dot{g}_I}{\partial u}\right|_{g_I^*, u^*} \\ \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial g_I}\right|_{g_I^*, u^*} & \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}\right|_{g_I^*, u^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 1 & -\frac{s}{v} \end{bmatrix} \tag{36}$$

As condições de estabilidade são:

$$DetJ > 0 \tag{37}$$

$$TrJ > 0 \tag{38}$$

A condição da equação 38 é igual a:

$$\frac{s}{v} > 0 \tag{39}$$

o que é sempre verdade por hipótese nesse modelo. A condição do determinante – condição da equação 37 – só será satisfeita quando:

Para qualquer valor positivo de x, o modelo é instável. A estabilidade local está apenas garantida quando $x < 0$. Isto é, o modelo só será estável se o crescimento do investimento reagir negativamente a um grau de utilização da capacidade acima do normal e positivamente a sua queda abaixo do normal, o que não faz sentido econômico.

$$x < 0 \tag{40}$$

Apêndice B – Condições Suficientes para a Estabilidade Dinâmica do Supermultiplicador Sraffiano[29]

O modelo é descrito por:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{41}$$

$$C_t = cY_t + Z_t \tag{42}$$

$$I_t = vg_t^e Y_t \tag{43}$$

$$s = 1 - c \tag{44}$$

Logo, o produto é dado por:

$$Y_t = \frac{Z_t}{s - vg_t^e} \tag{45}$$

Passando o logaritmo natural da equação 45 e derivando em relação ao tempo, temos:

$$lnY_t = lnZ_t - \ln(s - vg_t^e) \rightarrow \frac{dlnY_t}{dt} = g_t = z + \frac{v\dot{g}_t^e}{s - vg_t^e} \tag{46}$$

Portanto:

$$g_t = z + \frac{v\dot{g}_t^e}{s - vg_t^e} \tag{47}$$

Além disso, sabemos que:

$$g_k = \frac{I}{K} \tag{48}$$

29 A análise deste apêndice é baseada em Pariboni (2015).

Reescrevendo, temos que:

$$g_k = \frac{I}{Y}\frac{Y}{Y^*}\frac{Y^*}{K} = vg_t^e u_t \frac{1}{v} = u_t g_t^e \tag{49}$$

Supondo que a taxa de crescimento esperado se comporta da seguinte forma:

$$\dot{g}_t^e = b(g_t - g_t^e) \tag{50}$$

podemos substituir a equação 50 na 47 e chegar à taxa de crescimento do produto como:

$$g_t = \frac{z(s - vg_t^e) - vbg_t^e}{s - vg_t^e - vb} \tag{51}$$

Ao mesmo tempo, pela definição, temos que:

$$\dot{u}_t = u\,(g_t - g_k) \tag{52}$$

$$\dot{g}_t^e = b\left[\frac{z(s - vg_t^e) - vbg_t^e}{s - vg_t^e - vb} - g_t^e\right] \tag{53}$$

$$\dot{u}_t = u_t\left[\frac{z(s - vg_t^e) - vbg_t^e}{s - vg_t^e - vb} - u_t g_t^e\right] \tag{54}$$

Por se tratar de um sistema não linear, para determinarmos as condições de estabilidade local na vizinhança do equilíbrio fazemos uma aproximação linear e aplicamos ao ponto de equilíbrio. Para isso, calculamos a matriz jacobiana do sistema e avaliamos quando o sistema se encontra em equilíbrio. O equilíbrio é dado por:

$$\dot{g}^e = \dot{u} = 0 \tag{55}$$

$$g^{e*} = z \tag{56}$$

$$u^* = 1 \tag{57}$$

Aplicando essas condições ao jacobiano, temos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial \dot{g}^e}{\partial g^e}\right|_{g^{e*},u^*} & \left.\frac{\partial \dot{g}^e}{\partial u}\right|_{g^{e*},u^*} \\ \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial g^e}\right|_{g^{e*},u^*} & \left.\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}\right|_{g^{e*},u^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b(s-vz)}{s-vz-vb} & 0 \\ -\frac{s-vz}{s-vz-vb} & -z \end{bmatrix} \tag{58}$$

As condições de estabilidade são:

$$DetJ > 0 \tag{59}$$

$$TrJ > 0 \tag{60}$$

Para o determinante, chegamos a seguinte condição:

$$\frac{zb(s-vz)}{s-vz-vb} > 0 \tag{61}$$

Isso será verdade sempre que:

$$z < \frac{s}{v} - b \tag{62}$$

Ao mesmo tempo, da condição da equação 59, chegamos a:

$$\frac{-b(s-vz)}{s-vz-vb} < z \tag{63}$$

O que será verdade sempre que a taxa de crescimento z respeitar a desigualdade da equação 62. Portanto, a condição geral para estabilidade local em torno do equilíbrio que respeita simultaneamente as equações 59 e 60 é:

$$z < \frac{s}{v} - b \tag{64}$$

Autor correspondente:
Gustavo Bhering
E-mail: gustavo.bhering@gmail.com

Recebido em: 24/11/2017.
Aceito em: 30/11/2018.

CC BY