Pesquisas em Geociências

<http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias>

Transformação de Coordenadas Geográficas em Coordenadas Plano-retangulares (UTM) e Determinação da Convergência Meridiana com Minicalculadoras

Iran Carlos Stalliviere Corrêa, Clovis Carlos Carraro
Pesquisas em Geociências, 18 (18): 69-90, jan./abr., 1986.

Versão online disponível em:

<http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/article/view/21709>

Publicado por

Instituto de Geociências

Portal de Periódicos UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO GRANDE DO SUL

Informações Adicionais

Email: pesquisas@ufrgs.br

Políticas: <http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/about/editorialPolicies#openAccessPolicy>

Submissão: <http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/about/submissions#onlineSubmissions>

Diretrizes: <http://seer.ufrgs.br/PesquisasemGeociencias/about/submissions#authorGuidelines>

Data de publicação - jan./abr., 1986.

Instituto de Geociências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS EM COORDENADAS
PLANO-RETANGULARES (UTM) E DETERMINAÇÃO DA CONVERGÊNCIA
MERIDIANA COM MINICALCULADORAS

Iran Carlos Stalliviere Corrêa*
Clovis Carlos Carraro**

SINOPSE

Foi elaborado um programa para minicalculadoras no sistema AOS (Algebraic Operating System) com a finalidade de calcular as coordenadas planas de um ponto no sistema de projeção transversa de Mercator, a partir de suas coordenadas geográficas (latitude e longitude). Obtém-se também o valor da convergência dos meridianos, do referido ponto, relacionada ao Meridiano Central.

São apresentados as constantes da Carta Geral do Brasil (Hayford, 1909) e do Corrego Alegre (South American Datum, 1967).

Os cálculos de transformação de coordenadas através de minicalculadoras apresentam vantagens de rapidez na obtenção dos resultados, maior precisão nos cálculos e a não utilização das tabelas e abacos, necessárias no método manual.

ABSTRACT

This work presents a program for minicalculator of the Algebraic Operating System to calculate the plane coordinates of a point in the transverse Mercator projection system from the geographic coordinates, latitude and longitude. The convergence of the meridian in the point considered, related to the central meridian, can be calculated.

It's provided a list of constants both for the Carta Geral do Brasil datum (Hayford, 1909) and for the Corrego Alegre datum (South American Datum, 1967).

The calculation by minicalculator has obvious advantages over the hand calculation, providing quick and precise answer. Otherwise, the use of the tables and abacous is avoided.

INTRODUÇÃO

A superfície do globo terrestre não pode ser projetada sobre um plano, conservando ao mesmo tempo distâncias, áreas, ângulos e ainda a

- * Professor Adjunto do Departamento de Geodésia, Instituto de Geociências, UFRGS. Bolsista do CNPq.
- ** Professor Titular do Departamento de Geodésia, Instituto de Geociências. UFRGS.

Pesquisas	Porto Alegre	n.18	p.69-90	1986
-----------	--------------	------	---------	------

verdadeira relação entre estes elementos. Devido a isto a superfície da Terra deve ser representada por secções que serão projetadas sobre a superfície de uma figura geométrica que possa ser distendida em um plano.

O sistema de projeção desenvolvido por Gauss é uma representação direta e conforme do elipsóide sobre o plano de projeção, que apresenta a grande vantagem de se adaptar a áreas que se estendam sobre fusos elipsoidais de direção Norte-Sul.

O sistema universal transversal de Mercator (UTM) nada mais é que a Projeção Conforme de Gauss, com fusos de 6º de amplitude, dividido ao meio pelo Meridiano Central e apresentando o cilindro secante ao elipsóide com seu eixo contido no plano do equador.

A origem das coordenadas no sistema UTM, em cada fuso, é no cruzamento do equador com o Meridiano Central, acrescidas as constantes de +10.000.000,00 m (só para o hemisfério sul) no sentido do meridiano e 500.000,00 m no sentido do paralelo.

O fator de redução de escala é $K_0 = 1 - \frac{1}{2.500} = 0,9996$ no meridiano de secância.

A numeração dos fusos, de 1 a 60, é feita a partir do anti-meridiano de Greenwich e no sentido anti-horário.

OBJETIVOS

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar um programa para minicalculadoras no sistema AOS, que permita transformar coordenadas do sistema geográfico em coordenadas do sistema plano-retangular (UTM) independente se as coordenadas geográficas estiverem relacionadas ao Datum da Carta Geral do Brasil ou ao Datum Córrego Alegre. Pode-se obter também o valor da Convergência do Meridiano em relação ao Meridiano Central.

FÓRMULAS FUNDAMENTAIS

Figura 1

- x, y - coordenadas retangulares do ponto F
- a - semi-eixo maior
- b - semi-eixo menor
- FC - a grande Normal N
- FD - a pequena Normal N'
- ϕ - latitude geodésica (ângulo da grande normal com o eixo OE)
- ω - latitude geocêntrica (ângulo do raio reto FO com o eixo OE)

Para efetuarmos a dedução das fórmulas necessitamos conhecer os parâmetros que definem o elipsóide adotado, os quais são: o semi-eixo maior (a) e o achatamento (f).

Equação do achatamento:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad \therefore \quad f = 1 - \frac{a}{b}$$

Equação da excentricidade primeira:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \therefore \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Equação da excentricidade segunda:

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad \therefore \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

dividindo-se tudo por "a" temos:

$$e' = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Equação do semi-eixo maior:

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (1)$$

Equação do semi eixo menor:

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \quad (2)$$

Raio médio da Terra:

$$AE = a(1 - e^2)$$

Raio polar de curvatura:

$$c = \frac{a^2}{b}$$

Equação do meridiano (x, y coordenadas de F) - (Fig 1)

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90 - \phi) = \operatorname{cotg} \phi \quad (4)$$

derivando-se a equação (3) temos:

$$2a^2 y dy + 2b^2 x dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

logo pela equação (4) podemos dizer que:

$$\cotg \phi = - \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

elevando-se ao quadrado temos:

$$\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} = \cotg^2 \phi \quad \therefore \quad b^4 x^2 = a^4 y^2 \cdot \cotg^2 \phi \quad (5)$$

Tirando-se " y^2 " da equação da elipse (3) temos:

$$y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}$$

substituindo-se em (5)

$$b^4 x^2 = a^4 \cdot \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} \cdot \cotg^2 \phi$$

$$b^4 x^2 = (a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2) \cdot \cotg^2 \phi$$

dividindo-se por " b^2 "

$$b^2 x^2 = (a^4 - a^2 x^2) \cdot \cotg^2 \phi$$

$$b^2 x^2 = a^4 \cdot \cotg^2 \phi - a^2 x^2 \cotg^2 \phi$$

$$x^2 = \frac{a^4 \cdot \cotg^2 \phi}{a^2 \cdot \cotg^2 \phi + b^2}$$

extraíndo-se a raiz quadrada:

$$x = \frac{a^2 \cdot \cotg \phi}{\sqrt{a^2 \cotg^2 \phi + b^2}}$$

substituindo-se " $\cotg \phi$ " por " $\cos \phi / \sen \phi$ ", temos:

$$x = \frac{a^2 \cdot \cos \phi / \sen \phi}{\sqrt{b^2 + a^2 \cdot \cos^2 \phi / \sen^2 \phi}}$$

$$x = \frac{a^2 \cdot \cos \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi}} \quad (6)$$

tirando-se " x^2 " da equação da elipse (3) temos:

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{b^2}$$

e substituindo-se na equação (5)

$$b^4 \cdot \frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{b^2} = a^4 y^2 \cdot \cotg^2 \phi$$

$$y^2 = \frac{a^2 b^4}{a^2 b^2 + a^4 \cotg^2 \phi}$$

$$y^2 = \frac{b^4}{b^2 + a^2 \cotg^2 \phi}$$

extraíndo-se a raiz quadrada

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \cotg^2 \phi}}$$

substituindo-se " $\cotg \phi$ " por " $\cos \phi / \sin \phi$ ", temos:

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \cdot \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi}}} \quad \therefore \quad y = \frac{b^2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi}} \quad (7)$$

introduzindo-se em (6) e (7) o valor da 1ª ou da 2ª excentricidade

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

e substituindo-se os cosenos pelos senos ou vice-versa

$$\cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \phi \quad \sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$$

temos:

$$x = \frac{a^2 \cdot \cos \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 (1 - \sin^2 \phi)}}$$

$$x = \frac{a^2 \cdot \cos \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 - a^2 \sin^2 \phi}}$$

$$x = \frac{a^2 \cos \phi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \phi}}$$

$$x = \frac{a^2 \cos \phi}{\sqrt{a^2 - a^2 \cdot e^2 \sin^2 \phi}}$$

$$x = \frac{a^2 \cos \phi}{\sqrt{a^2 (1 - e^2 \sin^2 \phi)}}$$

$$x = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a^2 \cos \phi}{b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad (8)$$

$$y = \frac{b^2 \sin \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 (1 - \sin^2 \phi)}}$$

$$y = \frac{b^2 \sin \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 - a^2 \sin^2 \phi}}$$

$$y = \frac{b^2 \sin \phi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \phi}}$$

$$y = \frac{b^2 \sin \phi}{\sqrt{a^2 - a^2 e^2 \sin^2 \phi}}$$

$$y = \frac{b^2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{a^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}}$$

$$y = \frac{b^2 \operatorname{sen} \phi}{a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}$$

substituindo-se " b^2 " pela expressão (2) temos:

$$y = \frac{a (1 - e^2) \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad \text{ou} \quad y = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad (9)$$

Cálculo da Grande Normal (N)

sendo a projeção da Grande Normal

$$x = N \cos \phi$$

$$N = \frac{x}{\cos \phi}$$

substituindo-se "x" pela expressão (8)

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad \text{ou} \quad N = \frac{a^2}{b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad (10)$$

Cálculo da Pequena Normal (N')

sendo a projeção da Pequena Normal

$$y = N' \operatorname{sen} \phi$$

$$N' = \frac{y}{\operatorname{sen} \phi}$$

substituindo-se "y" pela expressão (9)

$$N' = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad \therefore \quad N' = N(1 - e^2) \quad (11)$$

ou

$$N' = \frac{b}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}}$$

Cálculo do Raio de Curvatura do Meridiano (ρ)

No elipsóide o raio de curvatura do meridiano tem o valor do cubo da Pequena Normal (N') dividido pelo quadrado do meio parâmetro.

O parâmetro é:

$$\frac{2}{a} b^2 \quad (12)$$

sendo pelas expressões (1) e (5)

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} ; \quad b = a \sqrt{1 - e^2}$$

e substituindo-se estes na expressão (12) temos:

$$\frac{2 \cdot a^2 (1 - e^2)}{a} = 2 \cdot a (1 - e^2)$$

logo o Raio de Curvatura do Meridiano é:

$$\rho = \frac{N'^3}{a^2 (1 - e^2)^2} \quad (13)$$

pela expressão (11)

$$N'^3 = N^3 (1 - e^2)^3$$

substituindo-se na expressão (13)

$$\rho = \frac{N^3 (1 - e^2)^3}{a^2 (1 - e^2)^2} = \frac{N^3 (1 - e^2)}{a^2}$$

pela expressão (10) podemos dizer que:

$$N^2 = \frac{a^2}{1 - e^2 \sin^2 \phi}$$

logo

$$\rho = \frac{N (1 - e^2) a^2}{(1 - e^2 \sin^2 \phi) a^2}$$

$$\rho = \frac{N(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \phi}$$

Arco Elementar da Elipse Meridiana:

$$dB = \rho d\phi$$

$$\frac{dB}{d\phi} = \frac{N(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \quad \text{ou} \quad \frac{dB}{d\phi} = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \phi} \quad (14)$$

Funções "W" e "v"

sendo pela expressão (10)

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad \therefore \quad N = \frac{a}{W}$$

logo

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \phi$$

sendo pela expressão (10)

$$N = \frac{a^2}{b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad N = \frac{a^2}{b \cdot V}$$

logo

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi \quad (15)$$

Relação entre "W" e "v"

$$N = \frac{a}{W} = \frac{a^2}{b \cdot V}$$

$$V = \frac{W \cdot a}{b}$$

donde "a" pela expressão (1) é:

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}}$$

logo

$$V = \frac{W}{\sqrt{1 - e^2}}$$

ou

$$V^2 = \frac{W^2}{(1 - e^2)} \quad \therefore \quad v^2 = \frac{1 - e^2 \sin^2 \phi}{(1 - e^2)} \quad (16)$$

De acordo com Taylor toda a função $f(x + ih)$ pode ser desenvolvida em série segundo as potências inteiras e positivas de uma das parcelas de $(x + ih)$ desde que a função e todas as suas derivadas conservem um valor finito entre " x " e " $(x + ih)$ " infinitamente próximos. O desenvolvimento da série de Taylor para funções algébricas racionais e inteiras de grau -1 é :

$$f(x+ih) = f(x) + ih \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{ih^2}{2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{ih^3}{6} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots$$

ou para o caso apresentado:

$$Y + iX = f(x+ih)$$

$$f(x) = B$$

desenvolvendo de acordo com a série de Taylor

$$f(x+ih) = f(x) + ih \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{ih^2}{2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{ih^3}{6} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots$$

ou

$$Y + iX = B + ih \cdot \frac{dB}{dx} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2B}{dx^2} + \frac{ih^3}{6} \cdot \frac{d^3B}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{d^4B}{dx^4} + \frac{ih^5}{120} \cdot \dots \\ \cdot \frac{d^5B}{dx^5} + \frac{h^6}{720} \cdot \frac{d^6B}{dx^6} + \dots$$

igualando as partes reais e imaginárias vem:

$$Y = B - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2B}{dx^2} + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{d^4B}{dx^4} - \frac{h^6}{720} \cdot \frac{d^6B}{dx^6} + \dots \quad (17)$$

$$X = h \cdot \frac{dB}{dx} - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3B}{dx^3} + \frac{h^5}{120} \cdot \frac{d^5B}{dx^5} - \dots \quad (18)$$

Determinação do Arco de Meridiano

O Arco de Meridiano é dado por:

$$B = a(1 - e^2) \int_0^\phi \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \cdot d\phi$$

e se calcula pelo estabelecimento do desenvolvimento em série da função

$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$ e depois pela integração dos termos sucessivos dessa série.

Obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = A - D \cos 2\phi + F \cos 4\phi - H \cos 6\phi + \dots$$

onde:

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6$$

$$D = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6$$

$$F = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6$$

$$H = \frac{35}{512} e^6$$

A integração dos termos da série em $\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$

se obtém levando-se em consideração que $\int \cos 2\phi d\phi = 1/2 \sin 2\phi$ e se obtém a seguinte expressão:

$$B = a(1 - e^2) \left[A \cdot \phi - \frac{D}{2} \sin 2\phi + \frac{F}{4} \sin 4\phi - \frac{H}{6} \sin 6\phi + \dots \right]$$

Para o cálculo das derivadas "B" em relação a "x", tem-se, atendendo que "B" e "x" são funções da latitude.

$$\frac{d^n B}{dx^n} = \frac{d}{d\phi} \cdot \left(\frac{d^{n-1} B}{dx^{n-1}} \right) \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

considerando-se

$$\frac{d\phi}{dx^n} = (1 + e'^2 \cos^2 \phi) \cos \phi \quad (19)$$

e que segundo a expressão (14)

$$\frac{dB}{d\phi} = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \phi} = \frac{N(1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \quad (20)$$

da expressão (19)

$$d\phi = (1 + e'^2 \cos^2 \phi) \cos \phi \cdot dx$$

substituindo-se esta na expressão (20)

$$\frac{dB}{dx} = \frac{N(1 - e^2)(1 + e'^2 \cos^2 \phi) \cos \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \quad (21)$$

sendo da expressão (16)

$$v^2 = \frac{W^2}{(1 - e^2)} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \phi}{(1 - e^2)}$$

e da expressão (15)

$$v^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi$$

substituindo-se estes termos na expressão (21) obtemos a derivada de $B = f(x)$

$$\frac{dB}{dx} = N \cos \phi \quad (22)$$

as demais serão:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = -N \cos^2 \phi \cdot \operatorname{tg} \phi \quad (23)$$

$$\frac{d^3 B}{dx^3} = -N \cos^3 \phi (1 + e'^2 \cos^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \phi) \quad (24)$$

$$\frac{d^4 B}{dx^4} = N \cos^4 \phi \cdot \operatorname{tg} \phi \left[(1 + e'^2 \cos^2 \phi) + 4(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^2 - \operatorname{tg}^2 \phi \right] \quad (25)$$

$$\frac{d^5 B}{dx^5} = N \cos^5 \phi \left[(1 + e'^2 \cos^2 \phi)(14 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi) + 40 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi - 9 \right] \quad (26)$$

$$\frac{d^6 B}{dx^6} = -N \cos^6 \phi + \operatorname{tg} \phi (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 270 e'^2 \cos^2 \phi - 330 e'^2 \sin^2 \phi) \quad (27)$$

Fazendo-se nestas últimas expressões

$$(1+e'^2 \cos^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \phi) = 6A_2$$

$$(1+e'^2 \cos^2 \phi) + 4(1+e'^2 \cos^2 \phi)^2 - \operatorname{tg}^2 \phi = 24A_3$$

$$(1+e'^2 \cos^2 \phi)(14-58\operatorname{tg}^2 \phi) + 40\operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi - 9 = 120A_4$$

$$(61-58\operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 270e'^2 \cos^2 \phi - 330e'^2 \operatorname{sen}^2 \phi) = 720A_5$$

substituindo-se nas expressões (17) e (18) e fazendo-se " $h=\Delta\lambda$ " após a aplicação do módulo de redução à escala (K_0) obteremos:

$$Y = K_0 B + \frac{K_0 N \operatorname{tg} \phi}{2} (\operatorname{sen}'' \cos \phi \cdot \Delta\lambda'')^2 + K_0 NA_3 \cdot \operatorname{tg} \phi (\operatorname{sen}'' \cos \phi \cdot \Delta\lambda'')^4 + K_0 NA_5 \operatorname{tg} \phi (\operatorname{sen}'' \cos \phi \cdot \Delta\lambda'')^6$$

$$X = K_0 N (\operatorname{sen}'' \cos \phi \cdot \Delta\lambda'') + K_0 NA_2 (\operatorname{sen}'' \cos \phi \cdot \Delta\lambda'')^3 + K_0 NA_4 (\operatorname{sen}'' \cos \phi \cdot \Delta\lambda'')^5$$

Devemos levar em consideração que para o sistema UTM as coordenadas "X" e "Y" são denominadas de "E" e "N" respectivamente.

CONVERGÊNCIA MERIDIANA

A convergência meridiana vem a ser o ângulo que em um determinado ponto a direção do Norte da Quadrícula faz com o Norte Geográfico. E em geral um ângulo muito pequeno e pode ser obtido a partir das coordenadas do ponto.

Tardi propõe para o cálculo da convergência meridiana a seguinte fórmula, a seguir deduzida, que leva em consideração as Coordenadas Geográficas do Ponto.

Figura 2

Estação - A

MAN - tg ao meridiano em A

TAG - tg ao paralelo em A

Estas tg fazem com os paralelos aos eixos um ângulo "θ" que é a convergência dos meridianos.

donde

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{d\phi} : \frac{dx}{d\phi} \quad (28)$$

das expressões (17) e (18) temos:

$$Y = B - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{d^4 B}{dx^4} - \frac{h^6}{720} \cdot \frac{d^6 B}{dx^6} + \dots$$

$$X = h \cdot \frac{dB}{dx} - \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^3 B}{dx^3} + \frac{h^5}{120} \cdot \frac{d^5 B}{dx^5} + \dots$$

substituindo-se as derivadas pelas suas respectivas expressões (22), (23), (24), (25), (26) e (27) temos:

$$Y = B + \frac{h^2}{2} \cdot N \cos^2 \phi \operatorname{tg} \phi + \frac{h^4}{24} \cdot N \cos^4 \phi \operatorname{tg} \phi \left[(1 + e'^2 \cos^2 \phi) + 4(1 + e'^2 \cos^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \phi) \right] + \frac{h^6}{720} \cdot N \cos^6 \phi \operatorname{tg} \phi (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi) + 270 e'^2 \cos^2 \phi - 330 e'^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$

$$X = h \cdot N \cos \phi + \frac{h^3}{6} \cdot N \cos^3 \phi (1 + e'^2 \cos^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{h^5}{120} \cdot N \cos^5 \phi \cdot$$

$$\left[(1 + e'^2 \cos^2 \phi) (14 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi) + 40 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi - 9 \right]$$

derivando-se por partes em função de "h" as equações acima temos:

$$\frac{dY}{dh} = h.N\cos\phi\sin\phi + \frac{h^3}{6}.N\cos^3\phi\sin\phi \left[(1+e'^2\cos^2\phi) + 4(1+e'^2\cos^2\phi)^2 - \right. \\ \left. - \operatorname{tg}^2\phi \right] + \frac{h^5}{120}.N\cos^5\phi\sin\phi(61-58\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi + 270e'^2\cos^2\phi - \\ 330e'^2\sin^2\phi)$$

$$\frac{dX}{dh} = N\cos\phi + \frac{h^2}{2}.N\cos^3\phi(1+e'^2\cos^2\phi - \operatorname{tg}^2\phi) + \frac{h^4}{24}.N\cos^5\phi \left[(1+e'^2\cos^2\phi). \right. \\ \left. (14-58\operatorname{tg}^2\phi) + 40\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi - 9 \right]$$

substituindo-se " $e'^2\cos^2\phi = n^2$ ", temos:

$$\frac{dY}{dh} = h.N\cos\phi\sin\phi + \frac{h^3}{6}.N\cos^3\phi\sin\phi \left[(1+n^2) + 4(1+n^2)^2 - \operatorname{tg}^2\phi \right] + \frac{h^5}{120}. \\ N\cos^5\phi\sin\phi(61-58\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi + 270n^2 - 330n^2.\operatorname{tg}\phi)$$

$$\frac{dX}{dh} = N\cos\phi + \frac{h^2}{2}.N\cos^3\phi(1+n^2 - \operatorname{tg}^2\phi) + \frac{h^4}{24}.N\cos^5\phi \left[(1+n^2)(14-58\operatorname{tg}^2\phi) \right. \\ \left. + 40\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi - 9 \right]$$

donde:

$$\frac{dY}{dh} = h.N\cos\phi\sin\phi + \frac{h^3}{6}.N\cos^3\phi\sin\phi(5-\operatorname{tg}^2\phi + 9n^2 + 4n^4) + \frac{h^5}{120}.N\cos^5\phi \\ \sin\phi(61-58\operatorname{tg}^2\phi + \operatorname{tg}^4\phi + 270n^2 - 330n^2\operatorname{tg}^2\phi)$$

$$\frac{dX}{dh} = N \cos \phi + \frac{h^2}{2} \cdot N \cos^3 \phi (1 + n^2 - \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{h^4}{24} \cdot N \cos^5 \phi (5 - 18 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 14 n^2 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi n^2)$$

pela equação (28)

$$\operatorname{tg} \theta = h \cdot \operatorname{sen} \phi + \frac{h^3}{3} \cdot \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi (1 - \operatorname{tg}^2 \phi + 3 n^2 + 2 n^4) + \frac{h^5}{15} \cdot \operatorname{sen} \phi \cos^4 \phi \cdot (2 + 4 \operatorname{tg}^2 \phi + 2 \operatorname{tg}^4 \phi)$$

considerando-se

$$\theta = \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \theta \dots$$

vem

$$\theta = h \cdot \operatorname{sen} \phi + \frac{h^3}{3} \cdot \operatorname{sen}^2 1'' \cdot \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi (1 + 3 n^2 + 2 n^4) + \frac{h^5}{15} \cdot \operatorname{sen}^4 1'' \cdot \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi (2 - \operatorname{tg}^2 \phi)$$

se considerarmos:

$$h = 10^{-4} \cdot \Delta \lambda''$$

temos:

$$\theta = h \cdot \operatorname{sen} \phi \cdot 10^4 + h^3 \cdot \frac{10^{12} \cdot \operatorname{sen}^2 1'' \cdot \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi \cdot (1 + 3 n^2 + 2 n^4)}{3} + h^5 \cdot \frac{10^{20} \cdot \operatorname{sen}^4 1'' \cdot \operatorname{sen} \phi \cos^4 \phi}{15} \cdot (2 - \operatorname{tg}^2 \phi)$$

PROGRAMA DE CÁLCULO

O programa de cálculo desenvolvido para minicalculadoras no sistema AOS transforma as coordenadas geográficas (latitude e longitude) em coordenadas plano-retangulares (N,E) conforme o fluxograma apresentado na figura 3.

CONSTANTES

Uma vez escolhido o Datum de Referência, introduz-se nas memórias as constantes e os parâmetros do elipsóide adotado, conforme quadro abaixo:

Memória	Símbolo	Carta Geral	Córrego Alegre
03	A	1,005073987	1,005052672
04	D/2	2,5423417 E ⁻³	2,5316391 E ⁻³
05	F/4	2,6792525 E ⁻⁶	2,6568050 E ⁻⁶
06	H/6	3,4615629 E ⁻⁹	3,4183912 E ⁻⁹
07	e' ²	6,7681702 E ⁻³	6,7397252 E ⁻³
08	AE	6335508,202	6335460,736
09	a	6378388	6378160
10	e ²	6,7226701 E ⁻³	6,6946053 E ⁻³
11	K ₀	0,9996	0,9996
12	sen1"	48481,37 E ⁻¹⁰	48481,37 E ⁻¹⁰

INSTRUÇÕES AOS USUÁRIOS

Introduz-se o programa na calculadora sabendo-se que necessita-se de 407 passos e 20 memórias. O valor da latitude e longitude geográfica é introduzido em graus, minutos, segundos e décimos de segundos respectivamente nas memórias 01 e 02. A longitude do meridiano central é introduzida na memória 00.

OBTENÇÃO DOS RESULTADOS

Acionando-se o localizador "B" o programa inicia o cálculo apresentando como primeiro resultado o valor da coordenada "N". Acionando-se a tecla "R/S" obtêm-se o valor da coordenada "E". Acionando-se novamente a tecla "R/S" é apresentado o valor da convergência dos meridianos no ponto considerado em relação ao Meridiano Central do fuso, em graus, minutos e segundos.

LISTAGEM DO PROGRAMA

```

LBL B RCL 08 x ( RCL 01 DMS STO 01 x π ÷ 180 x RCL 03 - RCL 04 x (RCL 01
x 2 ) sin + RCL 05 x ( RCL 01 x 4 ) sin - RCL 06 x ( RCL 01 x 6 ) sin )
= STO 13 RCL 01 cos x2 x RCL 07 + 1 = STO 14 RCL 09 ÷ ( 1 - RCL 01 sin
x2 x RCL 10 ) √ x RCL 11 = STO 15 x RCL 01 tan = STO 16 x (RCL 12 x RCL
01 cos x ( RCL 00 - RCL 02 DMS ) x 3600 ) |x| STO 17 x2 ÷ 2 + RCL 16 x
RCL 17 yx 4 x ( RCL 14 + 4 x RCL 14 x2 - RCL 01 tan x2 STO 18 ) ÷ 24 +
RCL 16 x RCL 17 yx 6 x ( 61 - 58 x RCL 18 + RCL 18 x2 + 270 x RCL 07 x
RCL 01 cos x2 - 330 x RCL 07 x RCL 01 sen x2 ) ÷ 720 + RCL 11 x RCL 13
= x ≥ t 2 21 + 1 EE 7 = INV EE R/S RCL 15 x RCL 17 + RCL 15 x RCL 17 yx 3
÷ 6 x ( RCL 14 - RCL 18 ) + RCL 15 x RCL 17 yx 5 ÷ 120 x ( RCL 14 x (14
- 58 x RCL 18 ) + 40 x RCL 18 + RCL 18 x2 - 9 ) = STO 19 RCL 00 - RCL 02
DMS = x 3600 = STO 13 x ≥ t 3 13 RCL 19 +/- STO 19 RCL 19 + 5 EE 5 = INV
EE R/S RCL 13 x RCL 01 sin + RCL 17 x2 x RCL 01 sin x RCL 13 ÷ 3 x (1 +
3 x RCL 07 x RCL 01 cos x2 + 2 x RCL 07 x2 x RCL 01 cos yx 4 ) + RCL 12
yx 4 x RCL 01 cos yx 4 x RCL 01 sin ÷ 15 x ( 2 - RCL 01 tan x2 ) = ÷ 3600
= INV DMS INV EE R/S.

```

EXEMPLO

Como exemplo apresentamos na Tabela I as coordenadas de alguns Marcos Geodésicos da cidade de Porto Alegre no sistema geográfico e os valores de suas respectivas transformações para o sistema Plano-Retangular bem como a Convergência Meridiana correspondente a cada ponto, levando-se em consideração o Datum Geodésico (Carta Geral ou Córrego Alegre).

CONCLUSÕES

Através da utilização de mini-calculadora para o cálculo da transformação de coordenadas geográficas para plano-retangulares e a obtenção da convergência meridiana do respectivo ponto, tem se observado uma eco-

nomia de tempo que aliada à acurada precisão dos resultados obtidos não dá margem de dúvida na utilização vantajosa de mini-calculadoras na solução de problemas peculiares que atingem a cartografia de um modo geral.

Devemos levar em consideração que o cálculo apresentado para a transformação de coordenadas do sistema geográfico para o sistema plano-retangular não necessita da utilização de tabelas e abacos para a obtenção dos respectivos resultados.

BIBLIOGRAFIA

- BACELLAR, R.H.; FLORES, T.T.; COSTA, J.P.P. 1951. *Matemática*. In: *Manual do Engenheiro Globo*. Porto Alegre, Globo. v.1.
- DACORSO NETTO, C. 1966. *Elementos de Cálculo Infinitesimal*. São Paulo, USP-Nacional. 478p.
- LEVALLOIS, J.J. 1970. *Géodésie Générale*. Paris, Elyrolles. v.2.

TABELA I

Datum da Carta Geral				
Marco Geodésico	Latitude(φ)	Longitude(λ)	N	E
Santana	-30º03'09,631"	51º07'33,095"	6.675.322,695	487.867,011
Piratini	-30º04'21,019"	51º13'58,047"	6.673.109,136	477.563,207
Teresópolis	-30º05'42,925"	51º12'01,950"	6.670.593,862	480.675,869
Catedral POA	-30º01'59,512"	51º13'47,873"	6.677.465,423	477.826,839
Torre Leste Ig.Dores	-30º01'53,891"	51º14'07,012"	6.677.637,401	477.313,876
Torre Oeste Ig.Dores	-30º01'54,103"	51º14'07,859"	6.677.630,829	477.291,203
Ig.St.Antônio	-30º03'26,590"	51º12'05,065"	6.674.790,263	480.585,099

Datum Córrego Alegre				
Marco Geodésico	Latitude(φ)	Longitude(λ)	N	E
Santana	-30º03'12,1455"	51º07'31,3737"	6.675.282,422	487.913,663
Piratini	-30º04'23,5352"	51º13'56,3422"	6.673.068,893	477.609,887
Teresópolis	-30º05'45,4268"	51º12'00,2732"	6.670.554,094	480.721,644
Catedral POA	-30º02'02,0256"	51º13'46,1681"	6.677.425,181	477.873,526
Torre Leste Ig.Dores	-30º01'56,4051"	51º14'05,3079"	6.677.597,142	477.360,566
Torre Oeste Ig.Dores	-30º01'56,6172"	51º14'06,1549"	6.677.590,567	477.337,894
Ig.St.Antônio	-30º03'29,1045"	51º12'03,3551"	6.674.750,030	480.631,781

FIG. 1 - ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

FIG. 2 - CONVERGÊNCIA MERIDIANA

Des. Flávia Bogen

FLUXOGRAMA DO CÁLCULO DAS COORDENADAS
E DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA

FIG. 3

Des. Flávio Boyen