Fractais na escola: uma experiência para inserção de conteúdos e conceitos novos no currículo

Rodrigo Sychocki da Silva[*]

Vandoir Stormowski[**]

Resumo: Neste artigo relatamos a processo de implementação de uma sequência de atividades de ensino relacionadas ao tema fractais. A implementação ocorreu no segundo semestre de 2006 no Colégio de Aplicação da UFRGS. As atividades e os conceitos que foram abordados, nem sempre possuem uma relação direta com fractais, mas foram considerados importantes para o desenvolvimento desta proposta. Nas atividades aparecem conceitos referentes à transformações geométricas, matrizes, geometria analítica, fractais, progressões geométricas e aritméticas, infinito, limites, área, dimensão e outros. A sequência de atividades foi planejada e implementada a partir da concepção de currículo em rede, em oposição ao currículo linear e compartimentado, que é bastante comum nas instituições de ensino. O uso de tecnologia foi essencial para que a sequência de atividades proposta produzisse resultados significativos.

Palavras-chave: Aprendizagem, Fractais, Currículo, Novos conteúdos, Tecnologia.

Abstract: In this article we describe the process of implementation of a sequence of teaching activities relating to the theme fractal. The implementation occurred in the second half of 2006

[*] Mestrando em Ensino de Matemática pela UFRGS. E-mail: rodrigo_mat2004@yahoo.com.br

[**] Doutorando em Informática na Educação pela UFRGS. E-mail: vandoir@yahoo.com.br

in the College of application of UFRGS. The activities and concepts that have been raised, not always have a direct relationship with fractal, but were considered important for the development of this proposal. In the activities appear concepts relating to processing geometrical, infinity, analytical geometry, fractal, geometrical and arithmetical progressions, infinite, limits, area, dimension and others. The sequence of activities was planned and implemented as from the design of curriculum in network, in opposition to the curriculum linear and compartmented that is quite common in the institutions of education. The use of technology was essential for the sequence of activities proposal produced significant results.

Keywords: Learning, Fractals, Curriculum, New content, Technology.

Introdução

Este trabalho relata o processo de aplicação de uma sequência de atividades de ensino que pretendem abordar o tema fractais na escola básica. Os principais objetivos são a sugestão de atividades que abordem novos conteúdos na escola básica e a reflexão sobre a efetiva inserção destes conteúdos no currículo escolar.

No planejamento e elaboração destas atividades, identificamos uma série de outros conceitos relacionados ao tema fractais, tais como transformações geométricas, matrizes, progressões, infinito, limites, área e dimensão, cuja abordagem consideramos relevantes para o efetivo alcance dos objetivos a que nos propomos.

A sugestão de novos conteúdos a serem estudados na escola não raro suscita uma série de questionamentos relativos ao pouco tempo disponível para o desenvolvimento destes em sala de aula, visto que já há muitos conteúdos no currículo escolar. Neste sentido, pensar na inserção de novos conteúdos na escola é necessariamente pensar ou repensar o currículo na escola básica. Além disso, a concepção de currículo que o corpo docente

possui, ou que a escola possui, é de fundamental importância para esta reflexão.

A seguir, faremos um pequeno apanhado sobre a concepção de currículo que consideramos no planejamento da sequência de atividades, e posteriormente alguns comentários sobre as atividades e a experiência realizada.

Alguns aspectos teóricos envolvidos

O que é currículo? Podemos entendê-lo como uma "estratégia para a ação educativa" (D'AMBROSIO, 1996) que possui três componentes: os objetivos, os conteúdos e métodos.

Como ponto de partida, ao pensarmos no currículo, temos as orientações dos documentos oficiais encontradas nos Parâmetros Curriculares e textos complementares. Os objetivos gerais para cada nível, série ou disciplina muitas vezes estão estabelecidos nos contextos de cada unidade escolar, em reuniões coletivas ou por diretrizes escolares. No que se refere aos conteúdos específicos, a liberdade individual dos professores na escolha dos objetivos e métodos aumenta. É importante notar que estes componentes possuem um viés de escolha, de opção, por parte do docente. Se levarmos em consideração esta flexibilidade curricular, não podemos falar em o currículo, mas em um currículo. Um currículo que se concretiza em sala de aula, decorrente das escolhas da unidade escolar e do próprio professor.

Quanto aos métodos é que vemos a maior liberdade de escolha para o professor. É claro que devemos considerar questões gerais de metodologia, no entanto observamos que é neste componente que o docente possui maior autonomia na caracterização da metodologia que irá utilizar.

E finalmente os conteúdos. O docente possui liberdade nessa escolha? Embora se possa considerar uma listagem de conteúdos predefinida pelos livros didáticos, pelos vestibulares,

ou mesmo pela 'herança cultural'[1], percebe-se que o professor faz escolhas quando define quais conteúdos terão maior ou menor ênfase durante o ano, e mesmo aqueles que serão abandonados por 'falta de tempo'. São opções e escolhas do docente que compõem um currículo.

É claro que nestas opções e escolhas que compõem um currículo, "[...] é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático" (BRASIL, 1999, p. 43) além da relevância do tema no processo de ensino e aprendizagem que devem nortear as escolhas dos docentes. Pensamos que a sequência didática proposta possui este potencial para interligar conceitos e conteúdos e, por isso, pode integrar as escolhas de conteúdos e metodologias que o docente faz.

A sequência didática que propomos não espera que o professor abandone outros conteúdos, mas que possibilite o acréscimo e o resgate de conceitos quase esquecidos no contexto escolar como as transformações geométricas, assim como a inserção de conteúdos matemáticos de desenvolvimento recente, ou que ainda estejam em desenvolvimento, como a teoria do caos e a geometria fractal. Estes conteúdos, por "[...] apresentarem a matemática do futuro, são mais interessantes para o jovem" (D'AMBROSIO, 1996, p. 59) e seus conceitos são acessíveis até no nível primário, mesmo que superficialmente.

Além de tudo o que foi apresentado, também destacamos a forma diferenciada da abordagem do estudo de matrizes que a sequência didática propõe: apresentando justificativas para a forma da multiplicação peculiar, destacando a origem histórica das operações e sua relação com as transformações geométricas, o estudo das propriedades das operações matriciais através das transformações propicia uma aplicação do conceito de matrizes que vá além dos exemplos superficiais dos livros didáticos.

---

[1] Estamos chamando de herança cultural o fato de conteúdos ou conceitos serem abordados por herança, de um ano para outro, de professores mais experientes para mais jovens, ou apenas porque sempre foi assim.

Destacamos que, caso se opte por discutir algum conceito diferente em sala de aula (fractais, dimensão, infinito, etc), que é o que nós defendemos, que esta discussão seja feita por uma abordagem que propicie, além do que destacamos anteriormente, interligações com outros conceitos matemáticos, que gere motivação e curiosidade nos alunos, não apenas um treinamento de procedimentos algébricos. Uma das formas de currículo que a sequência didática deste trabalho visa se opor é o currículo linear ou sequencial, no qual os conteúdos são tratados de forma isolada e compartimentada.

Segundo Pires (2000, p. 9),

> [...] essa linearidade [...] conduz a uma prática educativa excessivamente fechada, em que há pouco espaço para a criatividade, para a utilização de estratégias metodológicas [...], para o estabelecimento de relações entre os diferentes campos da matemática, enfim, para a consecução de metas colocadas para o ensino de Matemática pelas recentes propostas curriculares.

Propomos a organização de um 'currículo em rede' conforme sugere Pires (2000), formado por diversos pontos (conteúdos, conceitos) interligados por caminhos (relações) que não sejam únicos. Esta forma de conceber o currículo propicia a relação entre diferentes áreas da matemática ou de outras disciplinas, ao mesmo tempo que necessita de constante construção e renovação.

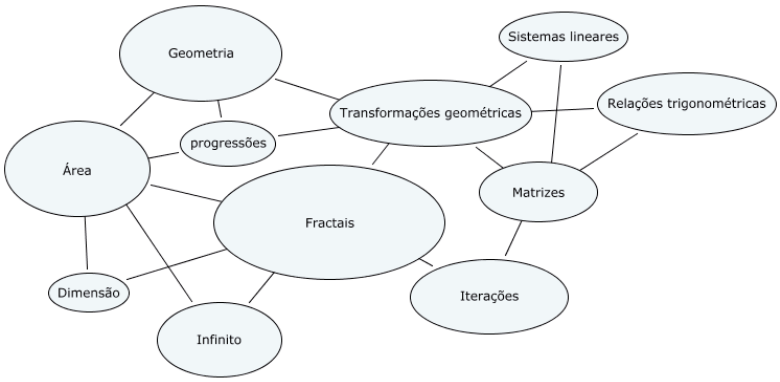


Fig. 1: Representação da rede de conceitos que se destacam na sequência didática proposta.

Deste modo, a sequência didática sugerida possui uma rede de conceitos tais como fractais, transformações geométricas, matrizes, entre outros. Toda a atividade está interligada com uma série de outros conceitos matemáticos, que podem ser mais ou menos aprofundados de acordo com o planejamento e os objetivos de cada momento. A figura acima (Fig. 1) apresenta a referida rede curricular para nossa sequência. As elipses maiores destacam os conceitos que tiveram maior importância em nosso planejamento. Mas a escolha ou opção de abordar determinado conteúdo de forma mais aprofundada ou superficial depende do planejamento e das estratégias de cada docente.

É claro que esta rede pode e deve sofrer modificações em cada aplicação e aplicação futura, inclusive no redimensionamento da importância de cada conceito, bem como de outras interligações possíveis. Este potencial adaptativo deve ser levado em consideração no planejamento das atividades.

O encaminhamento da proposta

Com relação à metodologia de trabalho, para a obtenção da sequência de atividades para o ensino das matrizes, foi adotada a engenharia didática que é destacada por Artigue (1996, p. 196) como "[...] um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na realização, na observação e na análise das sequências de ensino". Na engenharia didática, propõe-se uma pesquisa em sala de aula, baseada na investigação, planejamento, elaboração, aplicação e análise das sequências de atividades. Essa metodologia é diferente das demais existentes, pois se baseia na validação de resultados por parte do professor, isto é, na avaliação dos resultados produzidos pelos alunos após a aplicação da sequência de atividades.

Uma das abordagens que aparece na proposta é a utilização de transformações geométricas e de sua representação matricial. Poderia se perguntar qual a intenção desta utilização, já que o

conceito de fractais parece bastante longe destes conceitos. A motivação imediata é que gostaríamos de abordar o estudo de fractais, de forma diferente do que vemos em algumas situações envolvendo material concreto como figuras, desenhos, recortes, para obtenção de 'fractais'. Na verdade, neste processo, não se consegue fazer infinitas iterações (característica básica de muitos fractais), e em alguns casos, o número de iterações se resume a 3 ou 4, o que deveras é muito pouco para a abordagem de conceitos como infinito, dimensão, e até mesmo do conceito de fractal.

Deste modo, como poderíamos fazer uma infinidade de iterações, ou pelo menos um número suficientemente grande destas? Utilizando um recurso computacional! Neste sentido, elegemos o software Shapari, por ser de fácil utilização por parte dos alunos, e permitir fazer inúmeras iterações, com grande apelo visual nas figuras geradas.

Analisando este software, percebemos que as iterações eram realizadas a partir de transformações geométricas definidas por uma matriz. Diferentes transformações geométricas iteradas geram a figura fractal.

Como o objetivo era que o aluno criasse os fractais, naturalmente nos colocamos no processo de estudo de transformações geométricas e matrizes, para que os alunos pudessem utilizar todos os recursos do software em questão. Assim, surgiu a necessidade de estudo de matrizes e transformações, relacionadas ao tema fractais. Obviamente, de acordo com o planejamento de cada docente, este necessidade ou ênfase pode ser modificada e alterada.

Com o objetivo de criar figuras fractais, inicialmente foi proposto um estudo com matrizes, obtidas através de operações geométricas no plano. Essencialmente, o estudo concentrou-se nas operações de reflexão, translação e rotação. Os alunos associaram essas transformações com os termos: "espelho" para a reflexão, "mudança de lugar" para a translação e "girar um ângulo" a rotação. Em nenhum momento foi estimulada a troca das palavras pelos termos, mas sim partiu dos próprios alunos

a criação de um conceito de linguagem acessível para cada uma das transformações que estavam percebendo.

Naturalmente, foi estabelecido o estudo das matrizes e com isso verificou-se sua importância no estudo da mudança de coordenadas de um ponto no plano. Ocorreu nesse ponto a necessidade de criar um elemento matemático, capaz de produzir transformações geométricas através de cálculos precisos. Então, estava criada a motivação para definir o que é uma matriz.

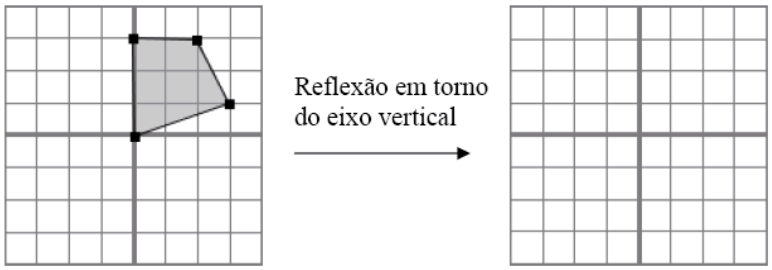
Um aspecto interessante das matrizes foi comentado por um aluno que questionou porque não havia sentido falar na operação de *divisão* de matrizes. A resposta mais freqüente para alguns educadores, neste momento, é dizer para o aluno que não existe simplesmente pelo fato de ninguém ter definido ainda. Essa resposta está incorreta, pois, devido os estudos das transformações geométricas, chegamos à conclusão sobre o porquê da existência das matrizes para a matemática, assim não faz sentido a operação de divisão para as matrizes.

Pode-se afirmar matematicamente que as operações matriciais estão fundamentadas nas operações que existem entre transformações lineares e vice-versa. No momento em que a ideia do que seja uma matriz e qual o sentido de realizar operações com ela, os alunos da turma puderam atribuíram um real sentido ao momento de aprendizagem no qual estavam inseridos. Quando o aluno se dá conta do real motivo para se aprender determinado conteúdo, essa é a fase mais importante durante o processo da engenharia didática, pois parte do aluno o significado atribuído ao conceito.

Antes de utilizar os recursos tecnológicos disponíveis na escola, as atividades iniciais foram pensadas para proporcionar aos alunos familiaridade com termos relevantes do assunto, tais como: reflexão, rotação, coordenadas, entre outros. A figura abaixo mostra a representação que os alunos deveriam propor para as transformações de reflexão e rotação no plano, identificando as novas coordenadas dos pontos obtidos.

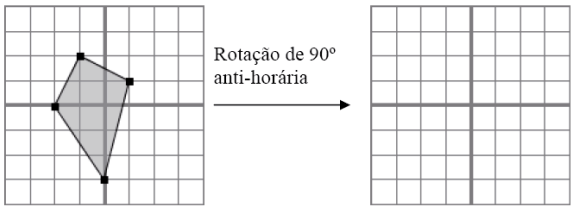
ATIVIDADE 1

Apresente graficamente o resultado de cada transformação geométrica:



ATIVIDADE 3

Faça a representação gráfica de cada transformação, e na tabela da direita identifique as coordenadas dos pontos da figura obtida.



(x, y)	$\rightarrow$	(x', y')
$(1, 1)$	$\rightarrow$	(__, __)
$(-1, 2)$	$\rightarrow$	(__, __)
$(-2, 0)$	$\rightarrow$	(__, __)
$(0, -3)$	$\rightarrow$	(__, __)

Fig. 2: Atividades iniciais em sala de aula para o estudo das transformações geométricas.

Após a necessária fundamentação matemática, estávamos no momento de partir para o uso de tecnologia como ferramenta essencial neste estudo das transformações geométricas. A ideia era utilizar alguns aplicativos que facilitassem a visualização das transformações já vistas em papel. O uso desses aplicativos potencializa o momento de investigação, e as hipóteses formuladas pelos alunos podem ser confirmadas com apenas alguns "cliques" do mouse. A descoberta da matemática, que está presente nos softwares, faz com que os alunos reconheçam a utilidade da tecnologia no seu processo de aprendizagem e atribuam significado ao conhecimento.

Durante esse trabalho no Colégio de Aplicação, como havia laboratório de informática disponível, alguns softwares foram usados e isso tornou o desenvolvimento das atividades

mais significativo para os alunos. Eles estavam pondo em prática o conhecimento que haviam organizado anteriormente na sala de aula tradicional, com algumas atividades impressas em papel.

Entre os softwares escolhidos para o trabalho, podemos destacar o MVT (*Mathematical Visualization Toolkit*), *Shapari*, *Microsoft Excel* e alguns aplicativos Java dispostos na internet, dentre eles um jogo chamado *Chaos Game*. O software MVT (Fig. 3) serviu para uma abordagem da transformação geométrica agindo em um vetor. Esse software possibilitou uma primeira visualização gráfica das transformações geométricas.

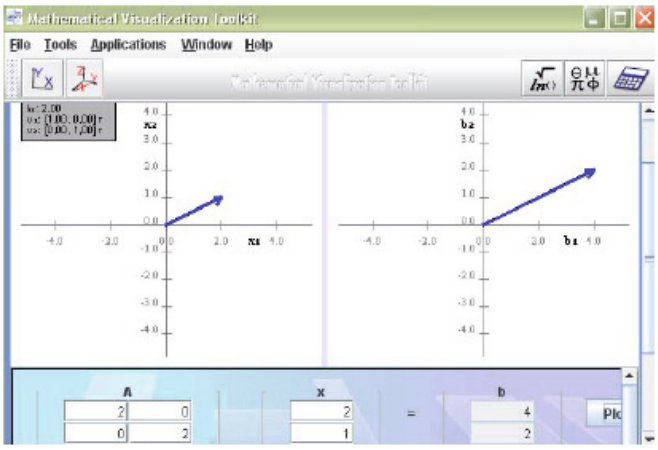


Fig. 3: O software MVT.

A criação de figuras fractais utilizando as transformações geométricas tornou-se evidente no uso do software *Shapari* (Fig. 4), no qual os alunos manipulavam as matrizes de transformação e visualizavam o resultado de sua aplicação na tela do computador em alguns instantes. Vale ressaltar que, em uma aula sem os recursos de informática, seria praticamente impossível realizar tal experimento, pois, para criar figuras fractais, o computador processa cálculos matemáticos que, em uma sala de aula com quadro e giz, estariam fora do alcance dos alunos devido à quantidade necessária de operações com matrizes. Além de proporcionar

um momento de maior interação entre os alunos, a aula no laboratório de informática foi essencial no estabelecimento das relações matemáticas, em que a descoberta de um aluno era compartilhada com os demais.

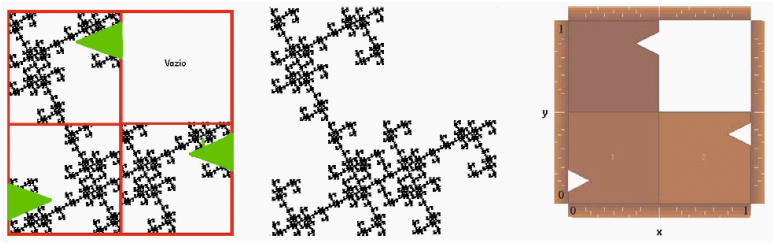


Fig. 4: O software *Shapari* e uma estratégia para construção de fractais.

Como a ideia central era construir um currículo em rede com essa sequência de atividades, consideramos que esse objetivo foi alcançado, devido à diversidade dos conteúdos e recursos utilizados durante as atividades. Essa ramificação do suposto currículo linear chegou até a aprendizagem dos alunos, pois, ao final da sequência de atividades propostas, foi destinada uma aula para a criação de um mapa conceitual que pudesse apresentar a produção individual de cada um, enfatizando as ligações entre os temas abordados em aula. O software escolhido para essa atividade foi o *Cmap Tools*, pois, além de ser fácil a sua manipulação, possibilita ao aluno estabelecer um grande número de relações entre os conceitos aprendidos durante as aulas.

O resultado final dessa sequência de atividades pode ser percebido na figura abaixo, na qual o aluno expressa uma série de relações significativas entre os conteúdos vistos durante as aulas através de um conjunto de linhas que se interligam. Isso demonstra que o professor pode optar no momento de suas aulas em seguir um currículo de forma linear em que não há a possibilidade de ramificar os conteúdos, impossibilitando o aluno de viver outras experiências e aprender novos conceitos, ou através de um determinado conteúdo, estabelecer ligações com outras

áreas do conhecimento e possibilitar ao aluno uma aprendizagem multifacetada. Neste caso, a escolha de uma sequência de atividades que proporcionou resultados significativos, mostra que o professor ao optar por essa metodologia de ensino, enriquece a formação do seu aluno.

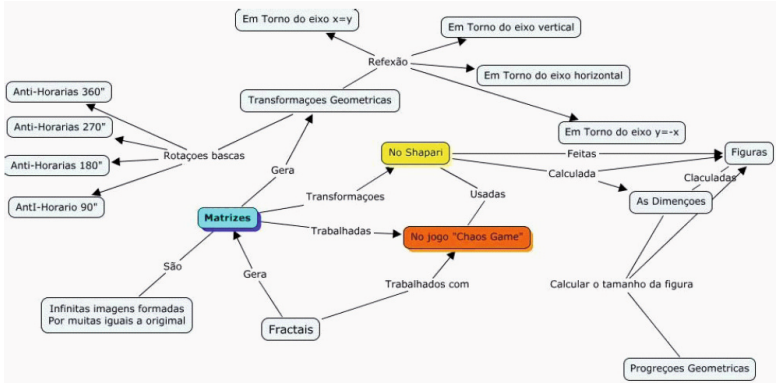


Fig. 5: Mapa conceitual produzido por um aluno ao final da seqüência de atividades.

A forma livre de o aluno representar esta rede de conceitos nos faz crer que os objetivos de elaborar atividades que propiciem a aprendizagem de uma rede interligada de conceitos foi atingida. Mesmo que o planejamento tenha dado ênfase maior a alguns conceitos, nem sempre isto se reflete na percepção do aluno. Cada estudante acaba dando destaque para aquilo que mais lhe motivou ou chamou a atenção. Comparando a produção do aluno acima (Fig. 5) com produções de outros alunos que foram coletados, percebemos claramente o quanto cada aluno desenvolve a sua própria rede de conceitos, com seus destaques e suas interligações.

Considerações finais

Consideramos que a compreensão mais adequada de currículo para este tipo de atividades com múltiplas relações é a de currículo em rede. Entendemos que o objetivo de desenvolver uma sequência de atividades que abordasse o conceito de fractais, relacionando uma série de conceitos, foi atingido. É claro que precisamos salientar que não é somente a utilização desta sequência didática que vai propiciar um currículo em rede, mas principalmente a metodologia utilizada pelo docente na condução das atividades, assim como a disposição do mesmo na abordagem de temas relacionados e que podem ter maior ou menor ênfase, de acordo com a oportunidade e planejamento do docente.

Como toda atividade docente, a sequência didática apresentada não se pretende completa, fechada e terminada. Sempre temos o que acrescentar, o que melhorar, o que modificar e esperamos que isto seja feito por cada um que se coloque a implementá-la. A utilização da modelagem com softwares no ensino de matemática, associada às seqüências didáticas, pode proporcionar melhores resultados, em relação a sua concepção original como método essencialmente investigativo, considerando que a estrutura da escola está fundamentada em horários, conteúdos mínimos, seriação e outros fatores. Com essa nova abordagem, o estudo de uma rede interligada de conceitos, entendemos, entendemos que a aprendizagem dos alunos fica mais próxima de situações reais e práticas, que dificilmente vão apresentar conceitos colocados em linha e compartimentados.

No entanto, deve-se lembrar que a redução da modelagem matemática a seqüências didáticas, simplesmente com o objetivo de contextualizar conceitos tende para simples ilustrações e se descaracterizaria como processo de modelagem, pois perde o caráter investigativo. Contudo, se forem aceitas seqüências na direção dos problemas modelados, forma-se uma rede de seqüências, que gera um ensino integrado, pois vários conceitos serão estudados num mesmo assunto de modelagem e com isso temos um efeito positivo

na aprendizagem dos alunos, pois os significados são dados pelas próprias situações didáticas e pela associação aos problemas reais investigados por eles. Esse foi o objetivo proposto e atingido pelo trabalho desenvolvido no Colégio de Aplicação. Através de modelagens e com o uso dos softwares foi possível desenvolver uma seqüência didática capaz de possibilitar a aprendizagem de fractais através de transformações geométricas e de diversos outros conceitos.

Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. *In*: BRUN, J. (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 4, p. 193-217, 1996.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; NEHRING, Cátia Maria. *Modelagem Matemática e Seqüências Didáticas:* uma relação de complementaridade. Bolema: Rio Claro, ano 21, n. 30, p. 131-147, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. v. 3:* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEF, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratam. *Educação Matemática:* da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. 2 ed., Belo Horizonte: Autentica, 2002.

PIRES, Célia Maria Carolina. *Currículos de matemática:* da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

STORMOWSKI, Vandoir. *Estudando matrizes a partir de transformações geométricas*. Dissertação de Mestrado. PPG-ENSIMAT, UFRGS, 2008. Disponível em http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14965/000673105.pdf?sequenc. Acesso em 10 de nov. 2010.

VASCONCELLOS, M. J. C. de; SCORDAMAGLIO, M. T.; CÂNDIDO, S. L. *Matemática:* projeto escola e cidadania para todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004. Coleção em três volumes.